Elemente de mecanică şi rezistenţa materialelor folosite în ingineria mecanică

- **Mecanică teoretică**
  - Statica sistemelor de forţe aplicate solidului rigid
  - Echilibrul solidului rigid acţionat de forţe
  - Legăturile solidului rigid
  - Statica sistemelor de corpuri
  - Grinzi cu zăbrele plane

- **Rezistenţa materialelor**
  - Tensiuni şi deformaţii
  - Solicitările simple ale barelor drepte
  - Teorii de rezistenţă
  - Solicitările compuse ale barelor drepte
  - Flambajul barei drepte comprimate
  - calculul plăcilor subţiri de revoluţie în teoria de membrană
  - Solicitări variabile

Bibliografie

1. Pupăzescu Al., *Mecanică teoretică şi rezistenţa materialelor*, Vol. I, Editura Universităţii din Ploieşti, 2004;
2. Pupăzescu Al., *Mecanică teoretică şi rezistenţa materialelor*, Vol. II, Editura Universităţii Petrol-Gaze din Ploieşti, 2007;
3. Eparu I., *Mecanică teoretică*, Editura Universităţii din Ploieşti, 2002;
4. Popa I., Rezistenţa materialelor, Editura Universităţii din Ploieşti, 2002;

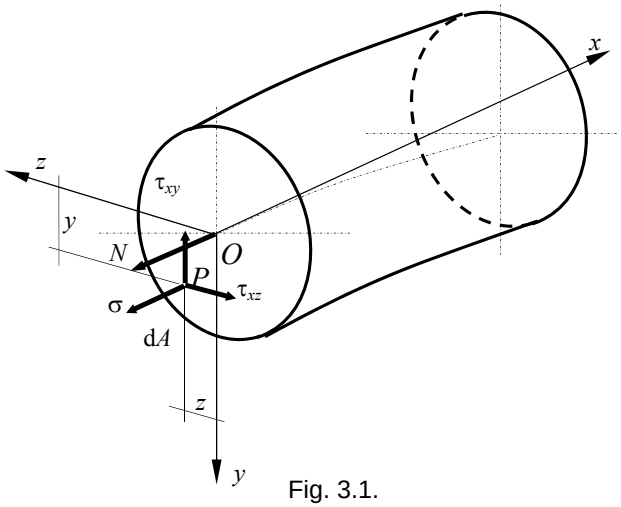


Fig. 3.1.

fiind rezultatul intersecției dintre suprafața exterioară a barei şi două secțiuni drepte, infinit apropiate. Între cele două curbe directoare se trasează o serie de generatoare foarte apropiate între ele, care pot fi considerate a fi segmente de lungime dx din fibrele situate la suprafața exterioară a barei (fig. 3.2, *a*).

După ce bara este solicitată de către o forță exterioară care generează în ea efortul secțional constant N (fig. 3.2, *b*), se constată următoarele:

– toate generatoarele trasate la suprafața barei au deplasări şi deformații liniare egale, ceea ce conduce la concluzia că, la exteriorul barei, segmentele de fibre de lungime dx s-au alungit toate cu aceeaşi cantitate Δdx_0 (indicele 0 precizează că se face referire la fibrele de la exteriorul barei);

– unghiurile dintre generatoare şi curbele directoare, inițial drepte, rămân drepte şi după solicitare.

Rezultă că la exteriorul barei:

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta dx_0}{dx} = \text{ct.}\ ;\ \gamma_0 = 0. \tag{3.2}$$

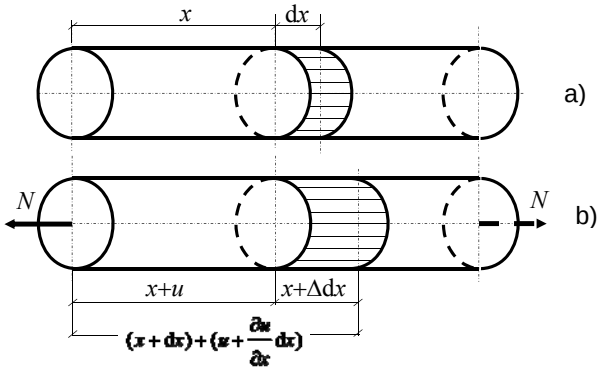


Fig.3.2.

În baza ipotezei secțiunilor plane, toate segmentele de fibre cuprinse între cele două secțiuni imaginare au aceleaşi deplasări şi deformații. Rezultă că în toate punctele de pe secțiunea dreaptă a barei supusă la întindere sau compresiune simplă, se dezvoltă aceeaşi stare de deformații caracterizată de:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \text{ct.}\ ;\ \gamma = 0. \tag{3.3}$$

Aspectul fizic al problemei este dat de relațiile:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon\ ;\ \tau = G\cdot\gamma \tag{3.4}$$

care exprimă legea simplă a lui Hooke.

Din combinarea aspectului fizic cu cel geometric, relațiile (3.3) şi (3.4), se poate deduce:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = \text{ct.}\ ;\ \tau = G\cdot\gamma = 0. \tag{3.5}$$

Din a doua relație (3.5) rezultă că:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \tag{3.6}$$

oricare ar fi direcțiile y şi z din planul secțiunii drepte.

Introducând aceste valori în relațiile (3.1) se constată că a doua, a treia şi a patra egalitate se verifică identic, iar din ultimele două relații rezultă:

$$\int_{(A)} y\mathrm{d}A = 0\ ;\ \int_{(A)} z\mathrm{d}A = 0\,. \tag{3.7}$$

Aceste două egalități, care exprimă momentele statice ale secțiunii barei în raport cu axele y şi z, se verifică deoarece, se cunoaşte de la mecanică, momentele statice ale unei suprafețe în raport cu axe ce trec prin centrul de greutate al acesteia sunt nule.

Fig. 3.3.

Din prima relație (3.1), cunoscând (3.5), se determină valoarea efortului axial N:

$$N = E\cdot\varepsilon\int_{(A)}\mathrm{d}A = E\cdot\varepsilon\cdot A \Rightarrow E\cdot\varepsilon = \frac{N}{A}$$

care, în baza primei relații (3.5) conduce la:

$$\sigma = \frac{N}{A}\,. \tag{3.8}$$

Rezultă că pentru o bară solicitată la întindere sau compresiune simplă, în orice secțiune dreaptă a acesteia, tensiunea σ se distribuie uniform în toate punctele şi valoarea ei se determină cu relația (3.8) (fig. 3.3), iar tensiunile tangențiale sunt nule – vezi relația (3.6).

3.1.2. Calculul de rezistenţă

Deoarece la barele drepte solicitate la întindere sau compresiune simplă, starea de tensiuni este la fel de periculoasă în toate punctele de pe secţiunea dreaptă, tensiunea σ având o distribuţie constantă conform relaţiei (3.8), condiţia de rezistenţă se aplică în secţiunea unde efortul N are valoarea maximă:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq \sigma_a \,. \tag{3.9}$$

Relaţia (3.9) poate fi folosită pentru:

– *dimensionarea* barei atunci când se cunoaşte solicitarea, deci se cunosc valoarea lui N, şi materialul din care aceasta este confecţionată, adică rezistenţa admisibilă σ_a:

$$A_{nec} = \frac{|N_{\max}|}{\sigma_a} = A_{dim} \,, \tag{3.10}$$

unde A_{nec} reprezintă aria necesară a secţiunii barei pentru ca ea să reziste la efortul axial $N_{\max}$, iar A_{dim} este aria secţiunii barei în funcţie de dimensiunile acesteia;

– *verificarea* dimensiunilor secţiunii barei atunci când se cunosc solicitarea, forma şi dimensiunile secţiunii barei, precum şi rezistenţa admisibilă:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{|N_{\max}|}{A_n^{ef}} \leq \sigma_a \tag{3.11}$$

unde A_n^{ef} reprezintă aria efectivă a secţiunii nete a barei; verificarea barei se va face după fiecare dimensionare, ca măsură suplimentară de siguranţă în ceea ce priveşte corectitudinea calculelor;

– determinarea *efortului capabil*, adică a forţei maxime de solicitare corespunzătoare lui $N_{\max}$, atunci când se cunosc forma şi dimensiunile secţiunii barei, precum şi rezistenţa admisibilă:

$$F \leq N_{cap} = \sigma_a A_n^{ef} \,. \tag{3.12}$$

De reţinut este faptul că, atât valoarea lui $N_{\max}$ cât şi aria secţiunii nete A_n

trebuie luate în acelaşi punct de pe axa barei, adică în aceeaşi secţiune, care se presupune a fi periculoasă.

În general, aria secţiunii nete a barei este:

$$A_n = A_{br} - A_s,$$

A_{br} reprezentă aria secţiunii brute a barei, adică a secţiunii curente, iar A_s – aria slăbirilor, adică aria cumulată a acelor părţi din secţiune care se pierd datorită unor nevoi constructive, ca de exemplu prinderea barei de alte părţi ale construcţiei.

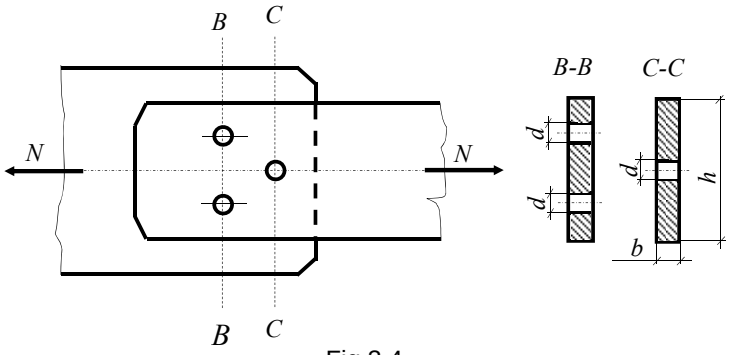


Fig.3.4.

În figura 3.4 este ilustrată prinderea a două platbande prin intermediul a trei nituri. Pentru cazul secţiunii *B–B* aria netă este: $A_{net}^{B-B} = bh - 2bd = b(h - 2d)$, iar pentru secţiunea *C–C*: $A_{net}^{C-C} = bh - bd = b(h - d)$. Deoarece aria slăbirilor A_s nu poate fi cunoscută la momentul dimensionării, ea depinzând de dimensiunile secţiunii curente, calculul de rezistenţă, în prima fază, va fi un calcul de predimensionare. Aceasta se va efectua folosind o relaţie de legătură între A_{br} şi A_n: de exemplu, pentru profile din S235 (OL37), $A_{br} = (1{,}10 \div 1{,}15)A_n$.

După predimensionarea secţiunii barei şi determinarea slăbirilor necesare se poate calcula aria secţiunii nete efective A_n^{ef} şi efectua verificarea acesteia cu relaţia (3.11).

Deoarece în condiţia de rezistenţă (3.9) intervine aria secţiunii nete, calculul barelor solicitate la întindere sau compresiune simplă poate fi efectuat complet numai odată cu calculul îmbinărilor acestora, care implică calculul elementelor de îmbinare (nituri, buloane, sudură).

3.1.3. Deformarea barelor drepte supuse la întindere sau compresiune

Ansamblul deplasărilor punctelor unei bare produse de solicitările la care este supusă, față de configurația barei nedeformate, defineşte forma deformată a acesteia.

În cazul unei bare solicitată la întindere sau compresiune simplă deformarea barei se produce numai axial (v. fig. 1.18, *b*) şi în baza relațiilor (1.30) şi (3.8) deformația specifică liniară este:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}. \tag{3.13}$$

În această situație, alungirea unei bare de lungime l supusă la întindere sau compresiune simplă este:

$$\Delta l = \int_{(l)} \varepsilon \cdot \mathrm{d}x = \int_{(l)} \frac{N}{EA} \mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

Dacă efortul secțional N este constant pe toată lungimea l a barei şi dacă aceasta are secțiunea constantă atunci;

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \tag{3.15}$$

Sunt anumite structuri care nu trebuie să prezinte, sub solicitări, deformații mai mari decât cele admisibile. Pentru astfel de structuri, pe lângă condiția de rezistență (3.9) trebuie verificată şi *condiția de rigiditate*. În cazul unei bare solicitată la întindere sau compresiune simplă, această condiție de rigiditate are forma:

$$(\Delta l)_{\max} \leq (\Delta l)_a, \tag{3.16}$$

unde $(\Delta l)_{\max}$ se determină, după caz, cu relația (3.14) sau (3.15).

Dacă condiția de rezistență (3.9) este îndeplinită, iar condiția de rigiditate (3.16) nu, atunci din acesta se exprimă A_{nec} în funcție de $(\Delta l)_a$ şi se determină noi dimensiuni pentru secțiunea barei studiate. În această situație condiția de deformație (3.16) este mai restrictivă, condiția de rezistență (3.9) fiind îndeplinită acoperitor.

3.1.4. Încercarea la tracţiune

Încercarea la tracțiune se utilizează ca încercare de referință pentru evidențierea comportării materialelor şi produselor industriale supuse solicitărilor mecanice.

Condițiile şi modul de realizare a încercării la tracțiune şi caracteristicile mecanice care se pot determina din această încercare sunt reglementate, în funcție de tipul produsului şi natura materialului din care este fabricat, prin standarde. În tabelul 3.1 sunt prezentate aceste norme pentru cele mai utilizate tipuri de materiale şi produse industriale.

3.1.4.1. Curba caracteristică convenţională la tracţiune (CCCT)

În mod obişnuit (materiale metalice, lemn, materiale plastice etc.) încercarea la tracțiune se execută pe *epruvete* confecționate din materialul care se cercetează, având forma şi dimensiunile prezentate în figura 3.5. Aceste epruvete au o porțiune centrală, cu secțiunea circulară (epruvete circulare) sau dreptunghiulară (epruvete plate), calibrată (cu dimensiuni precise) şi două capete de prindere (pe maşina cu care se realizează încercarea) cu diverse configurații (cilindrice, conice, cilindrice filetate, plate, plate cu orificii pentru bolțuri etc.). Pe porțiunea calibrată a epruvetelor se trasează (înainte de încercare) două repere la distanța L_0; de regulă, distanța (lungimea) inițială între repere L_0 se alege în funcție de aria secțiunii transversale inițiale a porțiunii calibrate S_0, utilizând relația:

$$L_0 = k\sqrt{S_0}\ . \qquad (3.17)$$

Epruvetele astfel dimensionate se numesc *epruvete proporționale* (de obicei, se adoptă k = 5,65, ceea ce, pentru epruvetele rotunde, este echivalent cu $L_0 = 5d_0$).

Tabelul 3.1.

Tipul produsului şi materialul din care este confecționat	Standardul care reglementează condițiile şi modul de încercare la tracțiune
Materiale metalice	SR EN 10002
Cabluri de oțel	STAS 272
Țevi metalice	STAS 6718
Lemn şi produse din lemn	STAS 6291; STAS 336
Cauciuc	STAS 3888
Materiale plastice	STAS 6642

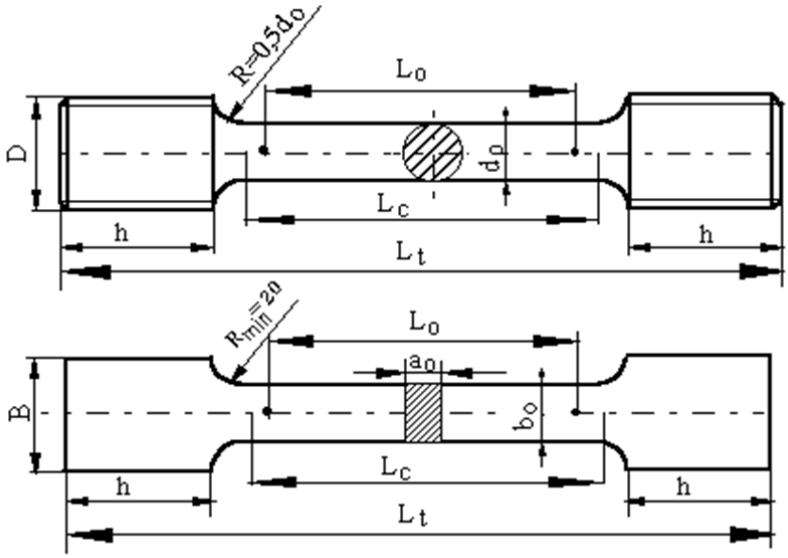


Fig. 3.5.

În timpul încercării la tracțiune, pe direcția axei longitudinale a unei epruvete realizate conform prescripțiilor anterior prezentate, se aplică o forță de tracțiune F, crescătoare ca intensitate, care produce deformarea progresivă şi, în final, ruperea epruvetei. Maşina folosită pentru realizarea încercării la tracțiune este prevăzută cu dispozitivele necesare pentru a măsura şi/sau înregistra (pe toată durata încercării) intensitatea forței aplicate F şi deformațiile liniare (lungirile sau extensiile) produse epruvetei $\Delta L = L - L_0$, L fiind distanța (lungimea) între reperele epruvetei la aplicarea forței de tracțiune cu intensitatea F. Prin măsurarea secvențială sau înregistrarea continuă a valorilor mărimilor F şi ΔL, se poate construi curba dependenței $F = g(\Delta L)$, numită *diagrama încercării la tracțiune* (*DIT*) sau *diagrama forță – alungire* (*extensie*).

Reprezentând în coordonate rectangulare variația tensiunii (convenționale) $\sigma = F/S_0$ în funcție de alungirea specifică $\varepsilon = \Delta L/L_0$ sau în funcție de alungirea procentuală $\varepsilon = (\Delta L/L_0)\cdot 100$, se obține o curbă $\sigma = f(\varepsilon)$, numită *curba caracteristică convențională la tracțiune* (*CCCT*) sau *curba caracteristică tensiune – deformație specifică* a materialului cercetat. De exemplu, în mod obişnuit, pentru materiale metalice *CCCT* se prezintă ca în figura 3.6, *a*, iar pentru materiale plastice ca în figura 3.6, *b*.

Cu ajutorul *CCCT* (construită pe baza încercării la tracțiune) se pot evidenția particularitățile comportării oricărui material metalic solicitat mecanic şi se pot defini o serie de caracteristici mecanice pe baza cărora se realizează calculele de proiectare şi/sau verificare a structurilor.

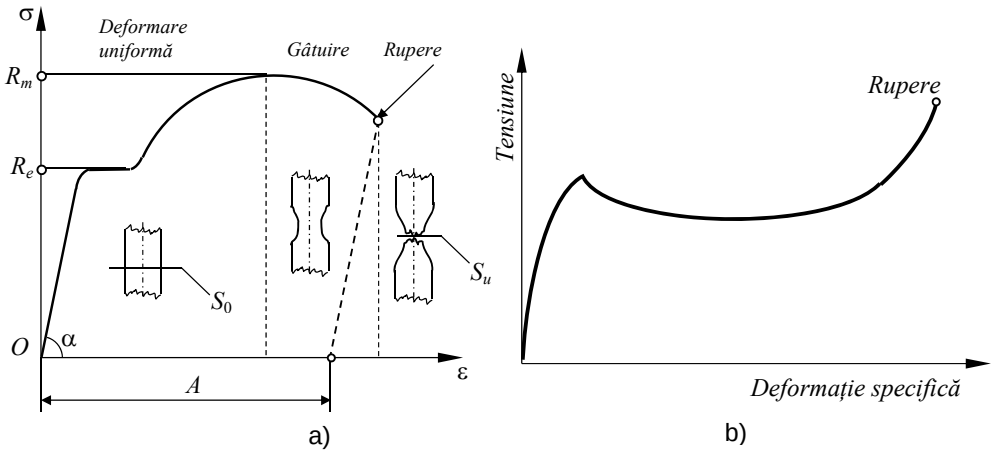


Fig. 3.6.

Există mai multe caracteristici care se definesc şi se determină în mod obişnuit:

a) *Limita de curgere aparentă* R_e (în N/mm^2); reprezintă *tensiunea la care se produce creşterea deformaţiilor specifice ale materialului la o tensiune constantă de solicitare* (tensiunea la care are loc fenomenul de curgere sau tensiunea corespunzătoare palierului înregistrat pe *CCCT* (v. fig. 3.6, *a*); această caracteristică se determină cu relaţia:

$$R_e = \frac{F_c}{A_0} = \frac{4F_c}{\pi d_0^2}, \tag{3.18}$$

în care F_c reprezintă valoarea forţei de solicitare a epruvetei la care apare fenomenul de curgere, în N; A_0 – aria secţiunii iniţiale a zonei calibrate a epruvetei, în mm^2.

În cazul materialelor la care nu se manifestă un fenomen de curgere aparentă, *CCCT* neprezentând variaţii bruşte ale pantei la instalarea procesului de deformare plastică, ci numai modificări continue, care evidenţiază creşterea ponderii deformaţiilor plastice şi apariţia fenomenului de ecruisare, se defineşte *limita de curgere convenţională* R_p. Ea reprezentând tensiunea la care alungirea specifică neproporţională (de natură plastică) ε_p atinge o valoare prescrisă; în mod curent limita de curgere convenţională se determină pentru o alungire procentuală neproporţională $\varepsilon_p = 0{,}2\%$ şi se notează $R_{p0,2}$.

b) *Rezistenţa la tracţiune* R_m (în N/mm^2); reprezintă *tensiunea corespunzătoare forţei maxime de solicitare a epruvetei înainte de rupere* F_{max} (v. fig. 3.6, *a*) şi se defineşte cu relaţia:

$$R_m = \frac{F_{\max}}{S_0} = \frac{4F_{\max}}{\pi d_0^2}. \tag{3.19}$$

Rezistența la tracțiune este o caracteristică mecanică importantă pentru foarte multe materiale şi produse industriale: materiale şi produse metalice, lemn şi produse din lemn, materiale plastice şi produse din materiale plastice, hârtie, materiale şi fibre textile etc.

c) *Alungirea procentuală după rupere* (sau *alungirea la rupere*) A (în %); se defineşte cu relația:

$$A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100, \tag{3.20}$$

în care L_u reprezintă lungimea ultimă a zonei calibrate, determinată prin aşezarea cap la cap a celor două părți ale epruvetei rupte la încercarea la tracțiune şi măsurarea distanței între cele două repere ale zonei calibrate a epruvetei.

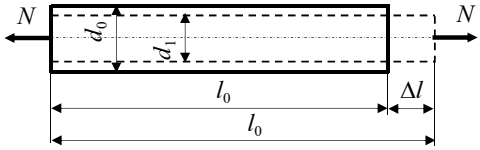


Fig. 3.7.

d) *Coeficientul de gâtuire* (*gâtuire* sau *stricțiune*), Z (în %); se defineşte cu relația:

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100, \tag{3.21}$$

în care S_u reprezintă aria epruvetei în secțiunea de rupere (aria minimă); alungirea procentuală după rupere şi coeficientul de gâtuire sunt caracteristici mecanice utilizate mai ales în cazul materialelor metalice şi materialelor plastice.

3.1.4.2. Deformaţii transversale. Coeficientul lui Poisson

După cum s-a putut constata, în cazul epruvetelor utilizate la încercarea la tracțiune, concomitent cu alungirea epruvetei se produce şi o gâtuitură a acesteia. Rezultă că, dacă se consideră o bară de lungime l_0 şi diametru d_0 (fig. 3.7), pe lângă deformația specifică longitudinală, a cărei valoare este:

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_1},$$

apare şi o deformație specifică transversală care are valoarea:

$$\varepsilon_{tr} = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = -\mu\varepsilon. \tag{3.22}$$

În relația anterioară $\mu \leq 0$ reprezintă *coeficientul lui Poisson* şi el constituie o constantă elastică a materialului.

Pentru a determina valoarea lui μ se defineşte deformația specifică volumică:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}.$$

Dacă se exprimâ, în relația anterioară, V_0 şi V_1 în funcție de d_0, respectiv d_1, şi dacă se ține seama că $l_1/l_0 = 1 + \varepsilon$ şi $\varepsilon_{tr} = d_1/d_0$, neglijând termeni ε^3 şi ε^2, ca valori foarte mici, deformația specifică volumică capătă expresia:

$$\varepsilon_v = (1 - \mu\varepsilon)^2(1 + \varepsilon) - 1 \cong \varepsilon(1 - 2\mu). \tag{3.23}$$

Pentru o bară solicitată la întindere, $\varepsilon_v \geq 0$, ceea ce face ca, din relația (3.23), $1 - 2\mu \geq 0$, adică $\mu \leq 0{,}5$. Rezultă că, $\mu \in [0,\ 0{,}5]$. Valoarea 0,5 corespunde corpurilor perfect elastice la care schimbarea formei se face fără variație de volum, iar valoarea zero corespunde plutei. Pentru oțelurile obişnuite $\mu = 0{,}3$.

3.1.4.3. Relaţia de izotropie

Aspectul fizic al problemelor rezistenței materialelor defineşte legătura dintre tensiuni şi deformații specifice. Pentru solicitarea de întindere monoaxială această legătură se exprimă, aşa cum s-a arătata în paragraful 1.8.3, sub forma (1.3) (legea simplă a lui Hooke). O relație similară se determină experimental şi în cazul solicitării de forfecare pură, solicitare la care apar numai tensiuni tangențiale τ şi deformații specifice γ:

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{3.24}$$

coeficientul de proporționalitate G reprezintă modulul de elasticitate transversal, se exprimă în N/mm^2 şi reprezintă, ca şi E, o constantă elastică a materialului.

Între cele trei constante elastice μ, E şi G există egalitatea:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \tag{3.25}$$

care reprezintă *relația de izotropie*.

Pentru $\mu \in (0,\ 0{,}5)$ se obține $0{,}333 \leq G/E \leq 0{,}5$.

În tabelul 3.2 sunt date valorile constantelor E, G şi μ pentru unele materiale uzuale.

Tabelul 3.2.

Material	Modulul de elasticitate [N/mm^2]		Coeficientul
	E	G	μ
Oțel carbon	$(2 \ldots 2{,}1)\cdot 10^5$	$8{,}1\cdot 10^4$	0.24 ... 0,28
Oțel aliat	$2{,}1\cdot 10^5$	$8{,}1\cdot 10^4$	0,25 ... 0,30
Fontă cenuşie şi albă	$(1{,}15 \ldots 1{,}60)\cdot 10^5$	$4{,}5\cdot 10^4$	0,23 ... 0,27
Cupru laminat	$(1{,}1 \ldots 1{,}3)\cdot 10^5$	$4{,}9\cdot 10^4$	
Bronz fosforos	$1{,}15 \cdot 10^5$	$4{,}2\cdot 10^4$	0,32 ... 0,35
Alamă	$(0{,}9 \ldots 1{,}0)\cdot 10^5$	$(3{,}5 \ldots 3{,}7)\cdot 10^4$	0,32 ... 0,42
Aliaje de aluminiu	$(0{,}67 \ldots 0{,}71)\cdot 10^5$	$(2{,}4 \ldots 2{,}7)\cdot 10^4$	0,32 ... 0,36
Duraluminiu	$(0{,}70 \ldots 0{,}75)\cdot 10^5$	$(2{,}6 \ldots 2{,}7)\cdot 10^4$	-
Zidărie de cărămidă	$(2{,}5 \ldots 3) \cdot 10^3$	-	-
Lemn (în lungul fibrelor)	$(9 \ldots 1{,}2)\cdot 10^3$	450 ... 650	-
Lemn (perpendicular pe fibre)	$(0{,}4 \ldots 1{,}0) \cdot 10^3$	450 ... 650	-
Cauciuc	8	-	0,47
Celuloid	$(1.7 \ldots 2.0)\cdot 10^3$	600 ... 700	0,39

3.1.5. Sisteme static nedeterminate la întindere sau compresiune simplă

În multe cazuri forțele de legătură sau eforturile secționale nu pot fi determinate numai din ecuații de echilibru static deoarece sunt mai multe necunoscute – forțe de legătură sau eforturi – decât ecuații de echilibru. În astfel de cazuri sistemul de forțe este denumit *sistem static nedeterminat*, iar gradul de nedeterminare statică este dat de diferența între numărul necunoscutelor şi numărul ecuațiilor de echilibru care se pot scrie.

Rezolvarea problemelor static nedeterminatre la întindere sau compresiune simplă necesită cunoaşterea în prealabil a rigidităților *EA*. Alegând aprioric aceste rigidități, se pot determina tensiunile dar nu se pot obține soluții economice care să ducă la atingerea rezistenței admisibile în toate elementele construcției. Un sistem static nedeterminat economic se poate realiza prin aproximări succesive, modificând rigiditățile elementelor componente ale sistemului.

Rezolvarea sistemelor static nedeterminate se poate face aplicând *metoda compatibilității geometrice a deplasărilor*.

Această metodă constă în definirea ecuațiilor de echilibru static şi a unui număr de relații de compatibilitatea deplasărilor egal cu gradul de nedeterminare statică al sistemului. Ea este exemplificată în aplicațiile P.3.9 – P.3.13.

3.1.6. Tensiuni pe secţiuni înclinate la bare solicitate la întindere sau compresiune

În toate aspectele legate de solicitarea de întindere sau compresiune a barei drepte studiate până acum s-a considerat numai secţiunea normală pe axă, pe care s-a calculat tensiunea normală. Se pune problema determinării tensiunilor care apar pe o secţiune înclinată a unei bare solicitată la întindere sau compresiune, aşa cum este cea din figura 3.8. Pe secţiunea normală *BC* se dezvoltă tensiunea normală $\sigma_x = N/A$. Indicele *x* subliniază faptul că tensiunea normală are direcţia

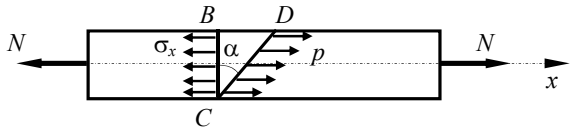


Fig. 3.8.

axei longitudinale *x* a barei. Se separă din bară un element de volum *BCD* cu grosimea egală cu unitatea (vezi fig. 3.9, *a*). Deoarece bara se consideră alcătuită din fibre care nu se apasă şi nu lunecă între ele în direcţie normală pe axa ei (v. paragr. 1.5.2), singurele tensiuni care apar sunt σ şi *p*. Elementul astfel considerat este în echilibru sub acţiunea forţelor generate de aceste tensiuni. Tensiunea totală *p* care acţionează pe secţiunea *CD* se poate descompune într-o componentă normală σ_α şi una tangenţială τ_α. Deoarece elementul considerat are dimensiuni foarte mici se poate aprecia că tensiunile sunt uniform repartizate pe cele două secţiuni, astfel încât forţele generate de acestea pot fi considerate ca forţe concentrate în centrele de greutate ale secţiunilor.

Forţele, provenite din înmulţirea tensiunilor cu ariile pe care ele se dezvoltă, sunt conţinute într-un singur plan, plan paralel cu planul *xBy*, ceea ce face ca pentru scrierea ecuaţiilor de echilibru să se folosească schema simplificată din figura 3.9, *b*.

Proiectând toate forţele pe direcţia lui σ_α, respectiv τ_α, se obţin ecuaţiile:

$$\sigma_\alpha \cdot 1 \cdot ds - \sigma_x \cdot 1 \cdot dy \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha \cdot 1 \cdot ds + \sigma_x \cdot 1 \cdot dy \cdot \sin\alpha = 0$$

Din figura 3.9, *b* se poate constata uşor că $dy = ds \cdot \cos\alpha$ şi $dx = ds \cdot \sin\alpha$.

După înlocuirea lui dx şi dy în ecuaţiile de proiecţie anterioare, prin rezolvarea acestora, se obţin expresiile tensiunilor σ_α şi τ_α:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_x(1+\cos 2\alpha)$$
$$\tau_\alpha = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha \qquad (3.26)$$

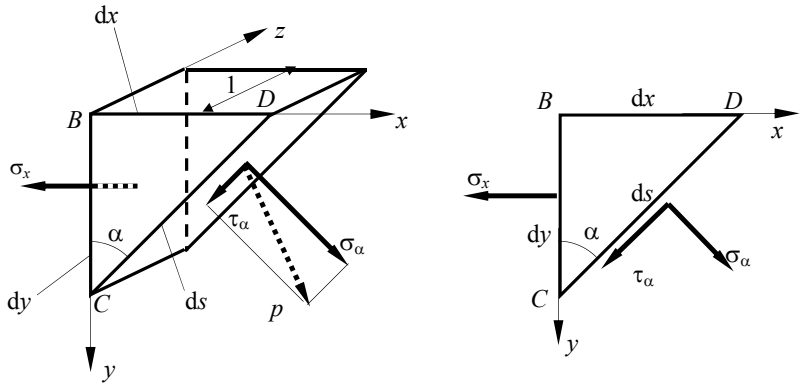


Fig. 3.9.

Pe baza relaţiilor (3.26), se constată că σ_α şi τ_α sunt funcţii continue de unghiul 2α. Astfel tensiunea normală σ_α este maximă pe secţiunea normală $\sigma_{\alpha=0} = \sigma_x$, iar într-un plan paralel cu axa barei, pentru care $\alpha = \pi/2$, ea are valoarea nulă $\sigma_{\alpha=\pi/2} = 0$. Tensiunea tangenţială este nulă pe secţiunea normală ($\alpha = 0$) şi pe un plan longitudinal ($\alpha = \pi/2$) şi maximă pe o secţiune înclinată la $\alpha = \pi/4$, având valoarea $\tau_{max} = \sigma_x/2$. Este de reţinut faptul că în planul în care tensiunea normală are valoarea maximă $\sigma_{max} = \sigma_x$ – planul secţiunii drepte – tensiunea tangenţială este nulă. În schimb pe planul în care tensiunea tangenţială are valoarea maximă, $\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$, tensiunea normală nu este nulă şi are valoarea $\sigma_{45^0} = \frac{\sigma_x}{2}$.

După cum s-a prezentat la încercarea la tracţiune, dacă forţa de tracţiune creşte mereu, bara se rupe. În cazul în care ruperea se produce ca urmare a unei valori maximale σ_{max} a tensiunii normale, ea are loc pe secţiunea dreaptă a barei. Dacă însă, ruperea se produce ca urmare a faptului ca tensiunea tangenţială a atins o valoare maximă, τ_{max}, limită, ea se produce pe o secţiune înclinată la 45°.

Probleme rezolvate

P.3.1. O bară de oțel cu secțiunea rotundă, d = 50 mm, este solicitată de un sistem de forțe axiale așa cum este arătat în figura 3.10, *a*. Să se calculeze alungirea totală a barei. Modulul de elasticitate longitudinal al oțelului este $2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2.

Întreaga bară fiind în echilibru, rezultă că fiecare parte din ea se află în echilibru. Astfel se poate constata că segmentul *A-B* al barei se află în echilibru, în fiecare secțiune a ei acționând o forță axială de întindere $N_{A\text{-}B}$ = 10000 N după cum se poate observa în figura 3.10, *b*. Alungirea acestui segment de bară este:

$$\Delta l_{A-B} = \frac{N_{A-B} l_{A-B}}{EA} = \frac{10000 \cdot 2 \cdot 10^3}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 1963{,}495} = 0{,}04968 \text{ mm}.$$

Segmentul *B-C* este solicitat de o forță axială de întindere $N_{B\text{-}C}$ = 10000 – 3000 = 7000 N, dacă se reduc forțele din stânga secțiunii *C*. Același rezultat se obține și când se reduc forțele din dreapta secțiunii *B*, $N_{B\text{-}C}$ = 9000 – 2000 = 7000 N. Alungirea acestui segment de bară este:

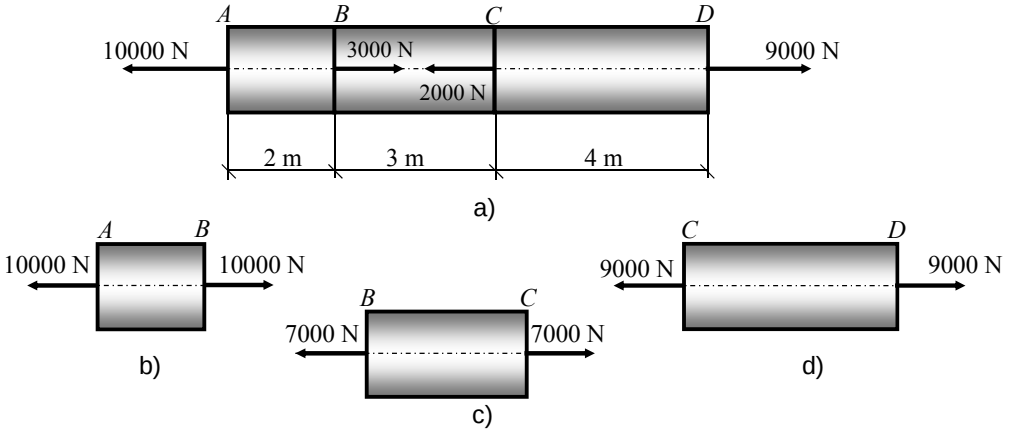


Fig. 3.10.

$$\Delta l_{B-C} = \frac{N_{B-C} l_{B-C}}{EA} = \frac{7000 \cdot 3 \cdot 10^3}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 1963{,}495} = 0{,}05217 \text{ mm}.$$

În mod similar se procedează și pentru segmentul *C-D* care este solicitat de forța axială de întindere $N_{C\text{-}D}$ = 9000 N. Alungirea acestuia este:

$$\Delta l_{C-D} = \frac{N_{C-D} l_{C-D}}{EA} = \frac{9000 \cdot 4 \cdot 10^3}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 1963{,}495} = 0{,}08944 \text{ mm}$$

Alungirea totală a barei este: Δl = 0,04968 + 0,05217 + 0,08944 = 0,19182 mm.

P.3.2. Să se determine alungirea totală a unei bare drepte cu secțiune constată, încastrată la partea superioară şi solicitată numai de greutatea proprie (fig. 3.11).

În fiecare secțiune a barei acționează un efort axial generat numai de greutatea proprie. Alungirea unui element de volum de grosime dx este:

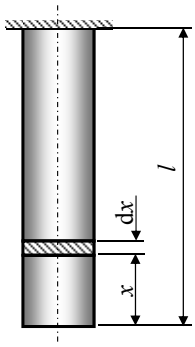


Fig. 3.11.

$$\Delta \mathrm{d}x = \varepsilon \mathrm{d}x = \frac{\sigma}{E}\mathrm{d}x = \frac{N}{EA}\mathrm{d}x = \frac{Ax\gamma}{EA}\mathrm{d}x$$

unde A este aria secțiunii barei şi γ greutatea specifică a materialului din care aceasta este confecționată (kg/m^3). Integrând pe toată lungimea l a barei se obține alungirea totală a acesteia:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Ax\gamma}{EA}\mathrm{d}x = \frac{A\gamma}{EA}\frac{l^2}{2} = \frac{(A\gamma l)l}{2EA} = \frac{Gl}{2EA}$$

unde G este greutatea totală a barei. Se poate observa că alungirea totală produsă de greutatea barei este egală cu alungirea produsă de o încărcare egală cu jumătate din greutate barei aplicată la capetele acesteia.

P.3.3. Grinda cu zăbrele plană din figura 3.12 este solicitată de o forță de 120 kN. Materialul din care sunt confecționate barele este S235, iar coeficientul de siguranță ales este c = 1,5. Să se determine aria necesară pentru barele 1-3 şi 5-4.

Pentru a determina efortul axial $N_{1\text{-}3}$ din bara 1-3 este necesar să se determine mai întâi forțele de legătură din articulația nodului 1. Forța de legătura orizontală din articulația 1 este nulă

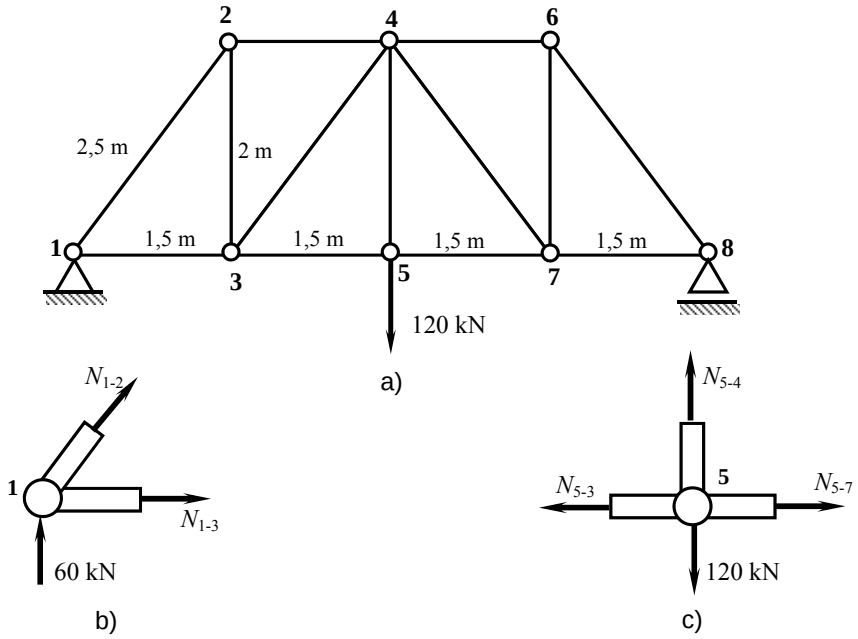


Fig. 3.12.

deoarece singura forță de încărcare este verticală. Forța de legătură verticală din 1, datorită simetriei va fi egală cu cea din 8 şi va avea valoarea 120/2 = 60 kN.

Efortul din bara 1-3 se determină din echilibrul nodului 1 (fig. 3.12, *b*):

$$\left(\sum F_V\right):\ 60 + N_{1-2}\frac{2}{2{,}5} = 0 \ \Rightarrow\ N_{1-2} = -75\text{kN}$$

$$\left(\sum F_O\right):\ N_{1-2}\frac{1{,}5}{2{,}5} + N_{1-3} = 0 \ \Rightarrow\ N_{1-3} = 45\text{kN}$$

Efortul din bara 5-4 se determină din echilibrul nodului 5:

$$\left(\sum F_V\right):\ N_{5-4} - 120 = 0 \Rightarrow N_{5-4} = 120\text{kN}$$

După cum se ştie, o bară articulată la capete preia numai eforturi axiale, în consecință barele 1-3 şi 5-4 sunt solicitate la întindere. Pentru determinarea ariilor necesare trebuie să se cunoască rezistența admisibilă a materialului din care acestea sunt confecționate. Ştiind că oțelul S235 are limita de elasticitate minimă R_e = 235 N/mm^2, rezistența admisibilă se determină cu relația:

$$\sigma_a = \frac{R_e}{c} = \frac{235}{1{,}5} = 156{,}7\ \text{N/mm}^2$$

Pentru bare solicitate la eforturi axiale tensiunea normală este da $\sigma = N / A$, relația (3.8), unde N este efortul axial, iar A aria secțiunii transversale a barei. Punând condiția ca tensiunea $\sigma = \sigma_a = 156{,}7\ \text{N/mm}^2$ se pot determina ariile necesare:

$$A_{1-3} = \frac{45000}{156{,}7} = 287{,}173\ \text{mm}^2 \quad \text{şi} \quad A_{5-4} = \frac{120000}{156{,}7} = 765{,}749\ \text{mm}^2$$

P.3.4. Două bare prismatice sunt solidar legate între ele şi supuse la o forță verticală de 500 kN aşa cum se vede în figura 3.13. Bara superioară este confecționată din oțel cu masa specifică 7850 kg/m^3, lungimea de 5 m şi aria secțiunii 6500 mm^2. Bara inferioară este confecționată din alamă cu masa specifică 8304 kg/m^3, lungimea 3 m şi aria secțiunii 4200 mm^2. Să se determine tensiunea maximă în fiecare bară.

Tensiunea maximă în bara de alamă se dezvoltă în secțiunea *B-B*. Aici, tensiunea normală verticală este produsă de încărcarea dată de forța de 500 kN şi de greutatea întregii bare situate sub secțiunea *B-B*.

Greutatea barei de alamă este $G_{al} = 4200\cdot10^{-6}\cdot3\cdot8304\cdot9{,}81$=1026,4 N. Tensiunea maximă este:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{500000 + 1026{,}4}{4200} = 119{,}29\ \text{N/mm}^2.$$

Tensiunea maximă în bara de oțel se dezvoltă în secțiunea *A-A*, secțiunea de susținere, deoarece aici acționează, pe lângă forța de 500 kN şi greutatea celor două bare. Greutatea barei de oțel este: $G_{ot} = 6500\cdot10^{-6}\cdot5\cdot7850\cdot9{,}81 = 2502{,}8$ N.

Tensiunea dezvoltată în secțiunea *A-A* este:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{500000 + 2052{,}8}{6500} = 77{,}3 \text{ N/mm}^2.$$

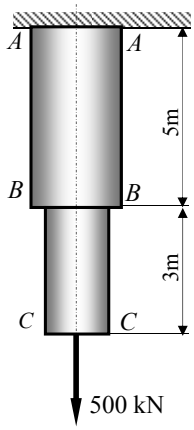


Fig. 3.13.

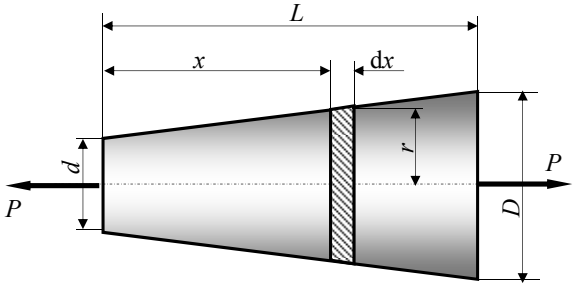


Fig.3.14.

P.3.5. O bară tronconică are secțiunea circulară, care variază uniform de la diametrul d la diametrul D, şi lungimea L. Să se calculeze alungirea barei atunci când este supusă unei forțe axiale P (vezi fig. 3.14).

La depărtarea x de secțiunea cu diametrul cel mai mic d se consideră un element de volum de lungime dx şi de rază r a cărei valoare se determină din triunghiuri asemenea:

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right).$$

Alungirea acestui volum elementar se poate determina aplicând formula de la alungirea unei bare supuse la efort axial, (3.15):

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{P\mathrm{d}x}{\pi\left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right)\right]^2 E}.$$

Alungirea totală se obține prin însumarea deformațiilor acestor elemente de volum pe întreaga lungime a barei.

$$\Delta l = \int_0^L \mathrm{d}(\Delta l) = \int_0^L \frac{4P\mathrm{d}x}{\pi\left[d + \frac{x}{L}(D-d)\right]^2 E} = \frac{4PL}{\pi DdE}.$$

P.3.6. Un corp având forma unui solid de revoluție este solicitat de forța P după cum se poate vedea în figura 3.15. Corpul are raza secțiunii superioare r_0, iar greutatea specifică a materialului din care este confecționat γ, în N/m^3. Să se determine legea de variație a razei secțiunii corpului în funcție de coordonata y, astfel încât în orice secțiune a lui, perpendiculară pe axul de simetrie, tensiunea σ să fie constantă.

Se consideră la depărtarea y de secțiunea superioară, un volum definit de două secțiuni foarte apropiate, situate la depărtarea dy una față de alta (vezi fig. 3.15). Dacă Q este greutatea părții superioare atunci dQ reprezintă creşterea lui Q când y a crescut cu dy. Elementul de volum considerat este mărginit de două secțiuni, perpendiculare pe axul de rotație, ce au razele r şi r +dr şi ale căror arii sunt A, respectiv A + dA. Pe aceste două suprafețe se dezvoltă tensiuni normale de compresiune ale căror mărimi, în baza condiției impuse în enunț, trebuie să fie egale:

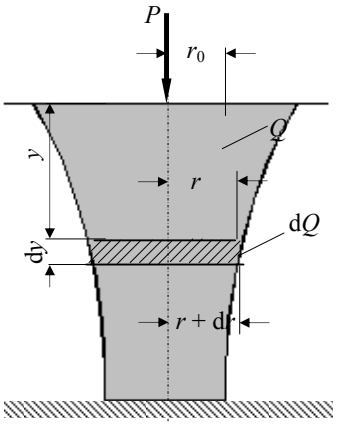


Fig. 3.15.

$$\frac{P+Q}{A}=\frac{P+Q+\mathrm{d}Q}{A+\mathrm{d}A}=\sigma=\text{const.}$$

Din această egalitate rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Q}=\frac{A}{P+Q}=\frac{1}{\sigma}. \qquad \text{(a)}$$

Creşterea ariei între cele două fețe, superioară şi inferioară ale elementului de volum este: dA = $\pi(r + \mathrm{d}r)^2 - - \pi r^2 = 2\pi r\mathrm{d}r$. Creşterea elementară a greutății este: d$Q = \pi r^2\gamma\mathrm{d}y$. Înlocuind pe d$A$ şi dQ în formula (a) şi integrând rezultă:

$$2\ln r=\frac{\gamma}{\sigma}y+C_1 \qquad \text{(b)}$$

Punând condițiile la limită şi anume, pentru $y = 0$, $r = r_0$ rezultă $C_1 = 2\ln r_0$. Pentru secțiunea superioară a corpului, la $y = 0$, tensiunea este $\sigma=\dfrac{P}{\pi r_0^2}$. Înlocuind aceste valori în (b) rezultă:

$$r=r_0\exp\left(\frac{\gamma\pi r_0^2}{2P}y\right).$$

P.3.7. Două bare identice, din oțel, sunt legate între ele aşa cum se poate vedea în figura 3.16, *a* şi sunt solicitate de o forță de 120 kN. Să se determine aria secțiuni barelor astfel încât tensiunea normală să nu fie mai mare de σ_a = 150 N/mm^2, precum şi deplasarea verticală a punctului B. Modulul de elasticitate longitudinal $E = 2{,}1\cdot10^5$ N/mm^2.

Din condiția de echilibru a nodului B rezultă (fig. 3.16, *b*):

$$\left(\sum F_V\right):\ N_{BA}\cos30^{\circ}+N_{BC}\cos30^{\circ}-120=0;$$

$$\left(\sum F_O\right):\ -N_{BA}\sin30^{\circ}+N_{BC}\sin30^{\circ}=0;$$

din care rezultă

$$N_{BA}=N_{BC}=\frac{120}{2\cos30^0}=69{,}28\text{ kN}.$$

Aria secțiunii barelor se determină cu relația:

$$A=\frac{N}{\sigma_a}=\frac{69{,}28\cdot10^3}{150}=461{,}88\text{ mm}.$$

Deoarece, în rezistența materialelor s-a admis ipoteza micilor deformații, forma deformată a celor două bare, sub acțiunea încărcării, nu este mult diferită de forma inițială (fig. 3.16, *c*).Din

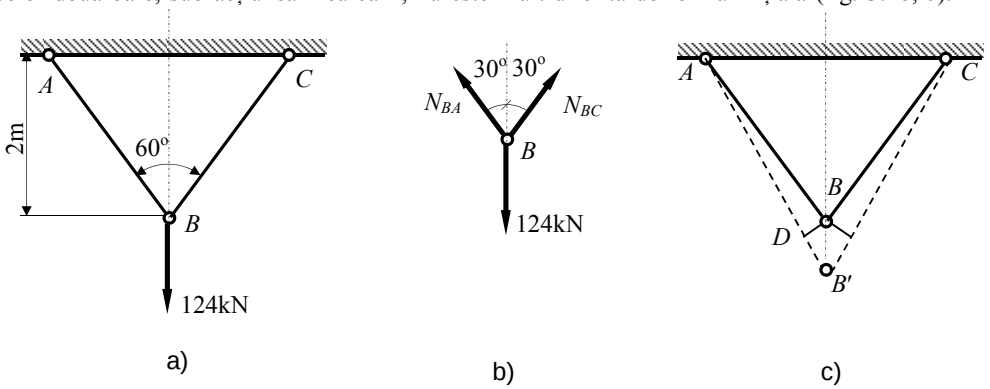


Fig. 3.16.

această cauză se consideră că unghiul *DB'B* are valoarea de 30°. Deplasarea pe verticală a nodului *B*, în acest caz, se determină astfel:

$$BB' = \frac{DB'}{\cos 30^0} = \frac{Nl}{EA} \cdot \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{69{,}28 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 461{,}88} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{\cos 30^0} \cdot \frac{1}{\cos 30^0} = 1{,}9 \text{ mm.}$$

P.3.8. Două bare din oțel *AB* şi *BC* sunt articulate la capete şi sunt solicitate de o forță $F = 236$ kN aşa cum este arătat în figura 3.17, *a*. Materialul din care sunt confecționate cele două bare este un oțel turnat care are limita de curgere aparentă $R_e = 240$ N/mm^2. Coeficienții de siguranță adoptați sunt: 1,5 pentru solicitarea de întindere şi 3 pentru solicitarea de compresiune. Să se determine ariile secțiunilor transversale pentru cele două bare şi de asemenea, componenta orizontală şi cea verticală ale deplasării punctului *B*. Se va considera $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2.

Din echilibrul nodului *B* rezultă (fig. 3.17, *b*):

$$\left(\sum F_V\right): \; -N_{BC} \sin 30^o - F = 0;$$

$$\left(\sum F_O\right): -N_{BC} \cos 30^o - N_{BA} = 0;$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$N_{BC} = \frac{-F}{\sin 30^0} = -\frac{236}{\sin 30^0} = -472 \text{ kN};$$

$$N_{BA} = -N_{BC} \cos 30^0 = 472 \cdot \cos 30^0 = 408{,}76 \text{ kN}.$$

Tensiunile admisibile se determină cu relația (1.27): $\sigma_a^{trac} = 240/1{,}5 = 160$ N/mm^2 pentru solicitarea de tracțiune şi $\sigma_a^{comp} = 240/3 = 80$ N/mm^2 pentru solicitarea de compresiune.

Ariile necesare pentru cele două bare se determină cu relația (3.10):

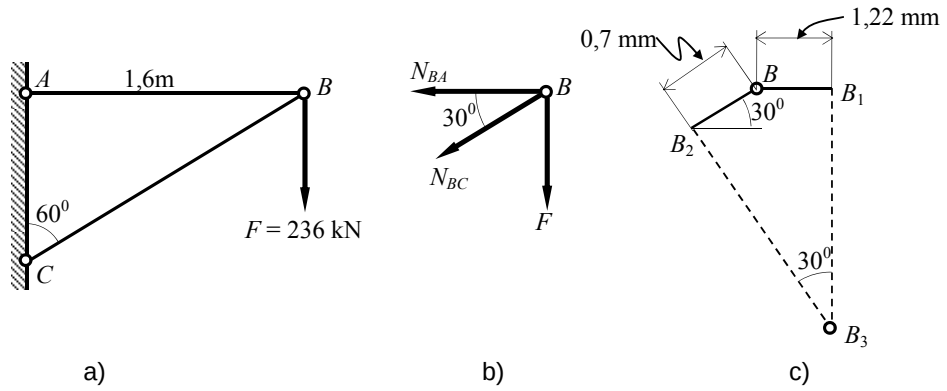


Fig. 3.17.

$$A_{BA} = \frac{N_{BA}}{\sigma_a^{trac}} = \frac{408{,}75 \cdot 10^3}{160} = 2554{,}75 \text{ mm}^2;$$

$$A_{BC} = \frac{|N_{BC}|}{\sigma_a^{tcomp}} = \frac{472 \cdot 10^3}{80} = 5900 \text{ mm}^2.$$

Pentru a determina deplasarea punctului B este necesar ca mai întâi să calculăm deformațiile axiale ale celor două bare folosind relația (3.15):

$$\Delta l_{BA} = \frac{N_{BA} l_{BA}}{EA_{BA}} = \frac{408{,}71 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 2554{,}75} = 1{,}2 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{EA_{BC}} = \frac{-472 \cdot 10^3 \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^3}{\sin 60^0}}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 2554{,}75} = -0{,}7 \text{ mm}.$$

Poziția punctului B după solicitarea barelor se poate determina ținând seama că bara AB se alungeşte cu 1,22 mm, ea putându-se roti în jurul punctului A, iar bara CB se scurtează cu 0,7 mm, ea putându-se roti în jurul punctului C. Deoarece deformațiile sunt mici, se poate considera că deplasarea punctului B cauzată de rotirea barei AB în jurul punctului A, poate fi asimilată cu segmentul de dreaptă B_1B_3. Acelaşi raționament se poate aplica şi în cazul rotirii barei BC. Din studiul geometric al figurii 3.17, *c*, rezultă deplasările punctului B:

$$u_B = 1{,}22 \text{ mm}; \qquad v_B = \frac{0{,}7 \cos 30^0 + 1{,}22}{\tan 30^0} + 0{,}7 \sin 30^0 = 3{,}5 \text{ mm}.$$

P.3.9. Trei bare din oțel legate solidar între ele sunt solicitate de forța axială F (fig. 3.18) Cunoscând ariile secțiunilor transversale ale barelor A_1, A_2, A_3 să se determine lungimile acestora astfel încât în fiecare dintre ele tensiunea maximă să nu depăşească tensiunea admisibilă σ_a.

Pentru fiecare bară tensiunea maximă se dezvoltă în secţiunea sa superioară acolo unde efortul secţional este compus din forţa F dar şi din greutatea barelor situate sub secţiunea respectivă.

Dacă se consideră că bara 1 are greutatea pe metru liniar q_1 (N/m), din condiţia $\sigma_{max} = \sigma_a$, pusă la partea superioară a tronsonului 1, se obţine:

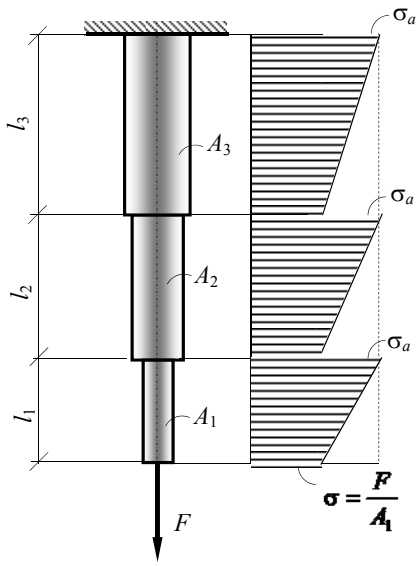


Fig. 3.18.

$$\sigma_a = \frac{F + l_1 q_1}{A_1} \Rightarrow l_1 = \frac{\sigma_a A_1 - F}{q_1}.$$

Procedând analog pentru tronsonul 2, rezultă:

$$\sigma_a = \frac{F + l_1 q_1 + l_2 q_2}{A_2} = \frac{\sigma_a A_1 + l_2 q_2}{A_2}$$

de unde:

$$l_2 = \frac{\sigma_a (A_2 - A_1)}{q_2}.$$

Prin recurenţă, pentru tronsonul i, se poate scrie:

$$l_i = \frac{\sigma_a (A_i - A_{i-1})}{q_i}.$$

P.3.10. Bara din figura 3.19, *a* are secţiunea constantă şi este încastrată între doi pereţi verticali. O forţă axială F este aplicată la distanţa l_1 de peretele din stânga. Să se determine forţele de legătură dintre pereţi şi bară.

Trebuie mai întâi să reprezentăm bara acţionată de forţa F şi de cele două forţe de legătură dintre ea şi pereţi. Cele două reacţiuni sunt notate cu H_1 şi H_2 aşa cum se poate vedea în figura 3.19, *b*. În această situaţie *aspectul static al problemei* constă dintr-o singură ecuaţie de echilibru:

$$\left(\sum F_O\right):\ H_1 - F + H_2 = 0$$

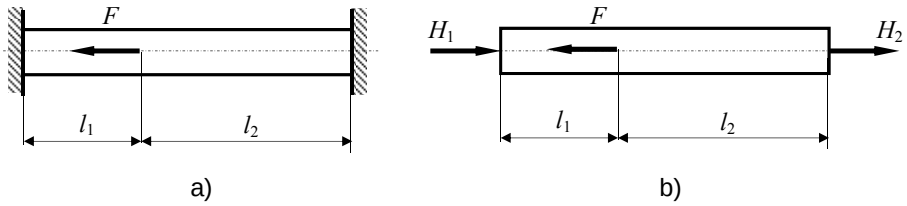


Fig. 3.19.

Se constată că sunt două necunoscute şi o singură ecuaţie: problema este static nedeterminată. În consecinţă, pe lângă ecuaţia de echilibru static trebuie adăugată o ecuaţie bazată pe deformaţia barei. După cum se poate vedea din figura 3.19, *b*, tronsonul de lungime l_1 este comprimat cu forţa H_1, iar tronsonul de lungime l_2 este supus la întindere cu forţa H_2. În consecinţă scurtarea tronsonului de lungime l_1 trebuie să fie egală cu alungirea tronsonului de lungime l_2. Această

egalitate constituie ecuaţia furnizată de *aspectul geometric al problemei*, cel care face legătura dintre deplasări şi deformaţii.

Modificarea lungimii unei bare solicitată axial se determină cu relaţia (3.15) care reprezintă în acest caz *aspectul fizic al problemei*. Rezultă:

$$\frac{H_1 l_1}{EA} = \frac{H_2 l_2}{EA},$$

unde A reprezintă aria secţiunii transversale a barei, iar E modulul de elasticitate longitudinal. Din ultima egalitate din care rezultă $H_1 l_1 = H_2 l_2$, şi din ecuaţia aspectului static al problemei se determină cele două necunoscute:

$$H_1 = \frac{F l_2}{l_1 + l_2} \text{ şi } H_2 = \frac{F l_1}{l_1 + l_2}.$$

Cunoscând forţele de legătură se pot determina deformaţiile celor două tronsoane:

$$\Delta l_1 = -\frac{H_1 l_1}{EA} = -\frac{F l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)}; \ \Delta l_1 = \frac{H_2 l_2}{EA} = \frac{F l_1 l_2}{EA(l_1 + l_2)}$$

cea ce dovedeşte că

$$\Delta l_2 = -\Delta l_1.$$

P.3.11. Într-un cilindru de oţel se află montată o bară de aluminiu, ansamblul fiind solicitat la compresiune de o forţă P = 400 kN prin intermediul a două plăci rigide, aşa cum este prezentat în figura 3.20, *a*. Diametrul interior al cilindrului este d = 80 mm, iar cel exterior D = 100 mm. Modulele de elasticitate sunt $E_{oţ} = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $E_{al} = 0{,}62 \cdot 10^5$ N/mm^2. Să se determine tensiunile în cilindrul de oţel şi în bara de aluminiu.

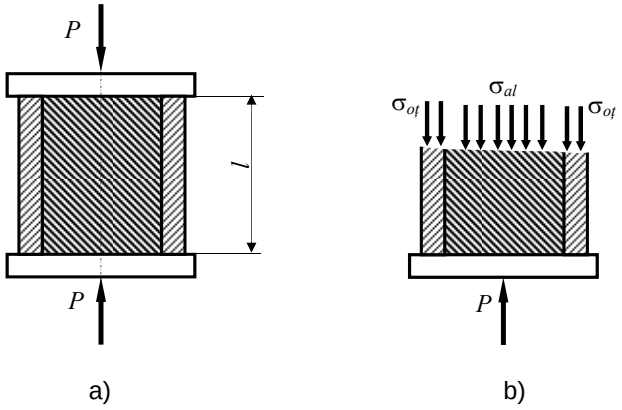


Fig. 3.20.

Dacă se face o secţiune orizontală prin ansamblu şi se înlătură una dintre părţi, de exemplu cea superioară, trebuie să se introducă efectul acesteia asupra părţii inferioare. Acest lucru se poate face introducând tensiunile normale care se dezvoltă, aşa cum este arătat în figura 3.20, *b*.

Partea rămasă în urma secţionării, cea inferioară trebuie să fie în echilibru sub acţiunea forţei P şi a forţelor generate de tensiuni: $P_{oţ} = \sigma_{oţ}A_{oţ}$ şi $P_{al} = \sigma_{al}A_{al}$, unde $A_{oţ}$, A_{al} reprezintă aria secţiunii tubului de oţel, respectiv cea a barei de aluminiu. Singura ecuaţie de echilibru a aspectului static al problemei ce se poate scrie este:

$$\left(\sum F_V\right): P - P_{oţ} - P_{al} = 0$$

Se constată că avem o ecuaţie cu două necunoscute $P_{oţ}$ şi P_{al}, deci sistemul este static nedeterminat. În această situaţie trebuie să adăugăm încă o ecuaţie provenită din deformaţia structurii. Deoarece tubul de oţel şi bara de aluminiu sunt montate între două plăci considerate rigide, deformaţia celor două elemente trebuie să fie identică. Deformarea unei bare sub acţiunea unei forţe axiale este dată de formula (3.15). În cazul analizat se poate scrie:

$$\frac{P_{ot}l}{E_{ot}A_{ot}} = \frac{P_{al}l}{E_{al}A_{al}},$$

sau

$$\frac{P_{ot}l}{2{,}05\cdot 10^5\cdot\frac{\pi}{4}\left(100^2-80^2\right)} = \frac{P_{al}l}{0{,}62\cdot 10^5\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 80^2} \text{ din care rezultă } P_{oţ} = 1{,}86P_{al}.$$

Această ecuaţie, împreună cu ecuaţia statică, formează un sistem de ecuaţii prin rezolvarea căruia se obţine: $P_{al} = 0{,}35P$ şi $P_{oţ} = 0{,}65P$.

Deoarece P = 400 kN, P_{al} = 140kN, iar $P_{oţ}$ = 260 kN. Tensiunile căutate se obţin împărţind valoarea forţelor la aria fiecărui material:

$$\sigma_{al} = \frac{120\cdot 10^3}{\frac{\pi}{4}\cdot 80^2} = 23{,}9\ \text{N/mm}^2;\quad \sigma_{ot} = \frac{260\cdot 10^3}{\frac{\pi}{4}\left(100^2-80^2\right)} = 92\ \text{N/mm}^2.$$

P.3.12. Bara *ABC* este considerată de rigiditate infinită şi orizontală înainte ca forţa P = 80 kN să fie aplicată (fig. 3.21, *a*). Barele care formează structura sunt articulate între ele şi faţă de corpul de referinţă. Bara *EB* este din cupru ($E_{cu} = 1{,}15\cdot 10^5$ N/mm^2) şi are aria secţiunii transversale A_{cu} = 516 mm^2, iar bara *CD* este din oţel ($E_{oţ} = 2{,}05\cdot 10^5$ N/mm^2) şi are secţiunea $A_{oţ}$ = 322 mm^2. Să se determine tensiunile din cele două bare şi alungirea barei de oţel. Se va neglija greutatea barei *ABC*.

Pentru a putea scrie ecuaţiile aspectului static al problemei trebuie mai întâi să izolăm bara *ABC*, înlocuind legăturile prin forţe de legătură şi eforturi secţionale, aşa cu se poate vedea în figura 3.21, *b*. Se constată că sistemul de forţe ce acţionează asupra barei *ABC* este un sistem coplanar, deci condiţia de echilibru se exprimă prin trei ecuaţii, două de proiecţie şi una de moment:

$$\left(\sum F_O\right):\ H_A = 0$$

$$\left(\sum F_V\right):\ V_A + N_{cu} + N_{oţ} - P = 0$$

$$\left(\sum M_A\right):\ -N_{cu}\cdot 2 - N_{oţ}\cdot 4 + P\cdot 3 = 0$$

Ultimele două ecuaţii conţin trei necunoscute: sistemul este static nedeterminat. Pentru suplimentarea numărului de ecuaţii se apelează la aspectul geometric. Deoarece bara *ABC* este perfect rigidă singura posibilitate de mişcare este rotirea în jurul articulaţiei *A*. Linia întreruptă din

figura 3.21, *c* indică poziția finală a barei *ABC* după aplicarea forței *P*. Din asemănarea triunghiurilor ABB_1 şi ACC_1 se poate scrie:

$$\frac{\Delta l_{cu}}{2} = \frac{\Delta l_{oţ}}{4}$$

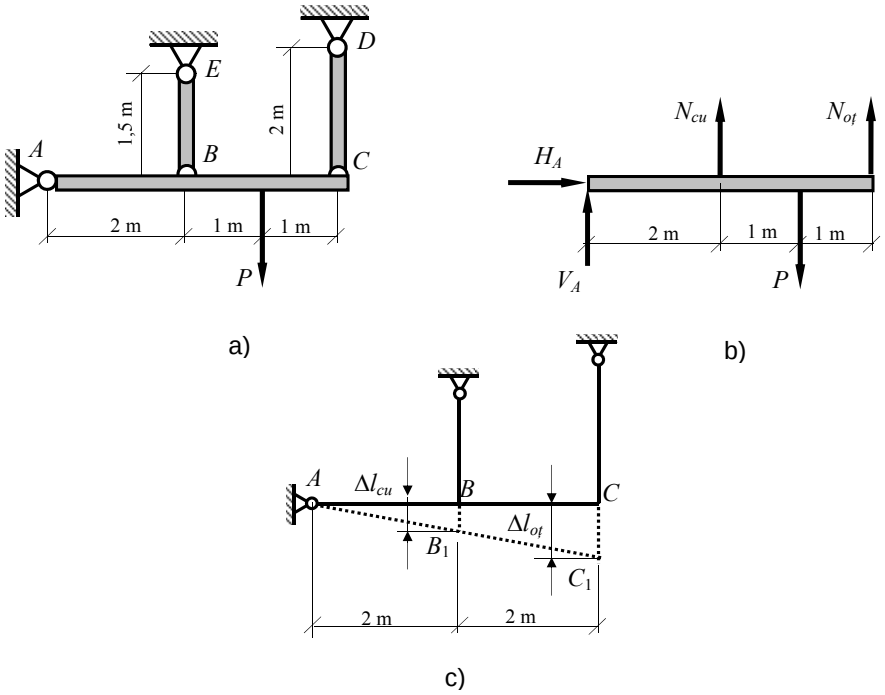


Fig. 3.21.

unde Δl_{cu} şi $\Delta l_{oţ}$ reprezintă alungirile barei de cupru, respectiv de oțel. Ecuația de natură geometrică va fi: $2\,\Delta l_{cu} = \Delta l_{oţ}$.

Folosind ecuația dată de aspectul fizic (3.15) se pot determina Δl_{cu} şi $\Delta l_{oţ}$:

$$\frac{2 \cdot N_{cu} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{1{,}15 \cdot 10^5 \cdot 516} = \frac{N_{cu} \cdot 2 \cdot 10^3}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 322}\text{, de unde } N_{cu} = 0{,}6 N_{oţ}$$

Această egalitate şi ecuația a treia a aspectului static formează un sistem care permite determinarea eforturilor din cele două bare:

$2 \cdot 0{,}6 \cdot N_{oţ} + 4 \cdot N_{oţ} = 3 \cdot P$, adică $N_{oţ} = 0{,}577P$ şi, apoi, $N_{cu} = 0{,}346P$.

Tensiunile din cele două bare sunt date de relația (3.9):

$$\sigma_{ot} = \frac{0{,}577 \cdot 80 \cdot 10^3}{322} = 143 \text{ N/mm}^2;\ \sigma_{cu} = \frac{0{,}346 \cdot 80 \cdot 10^3}{516} = 54 \text{ N/mm}^2.$$

Alungirea barei de oțel este:

$$\Delta l_{ot} = \frac{N_{ot} l_{ot}}{E_{ot} A_{ot}} = \frac{0{,}577 \cdot 80000 \cdot 2000}{2{,}05 \cdot 10^5 \cdot 322} = 1{,}4 \text{ mm}.$$

Alungirea barei de cupru va fi de două ori mai mică, adică $\Delta l_{cu} = 0{,}7$ mm.

P.3.13. Bara din figura 3.22 este din cupru, are secțiunea constantă şi este legată rigid de doi pereți, aşa cum este arătat. Ea are lungimea 1,5 m şi aria secțiunii 1613 mm^2. Bara a fost montată la temperatura 20°C. Să se determine tensiunea din bară dacă temperatura creşte cu 50°C. Se va considera $E = 1{,}15 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$ /^{o}C.

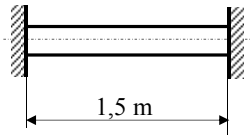


Fig. 3. 22.

Dacă bara ar avea unul din capete liber atunci datorită creşterii temperaturii ea va suferi o alungire ce se calculează cu relația

$$\Delta l = \alpha \cdot \Delta t \cdot l,$$

în care Δt reprezintă variația de temperatură. În cazul studiat $\Delta l = 16{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 1500 = 1{,}24$ mm.

În realitate bara are deplasările împiedicate, din cauza pereților, fapt ce face ca în ea să apară o tensiune de compresiune echivalentă unei scurtări $\Delta l = 1{,}24$ mm. Folosind formula (3.15) se poate determina mai întâi forța axială N corespunzătoare lui Δl:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \text{ sau } 1{,}24 = \frac{N \cdot 1500}{1{,}15 \cdot 10^5 \cdot 1613}, \text{ de unde } N = 153{,}343 \text{ kN}.$$

Tensiunea în bară va fi $\sigma = N/A = 153343/1613 = 95$ N/mm^2.

P.3.14. Bara *ABC* este perfect rigidă şi articulată în *A*. De ea sunt legate, tot prin articulații, bara *BE* din cupru şi bara *CD* din oțel (fig. 3.23, *a*). Întreg sistemul nu are tensiuni de monataj, iar greutatea barei *ABC* se neglijează. Temperatura barei *BE* este diminuată cu 10°C, iar cea a barei *CD* este majorată cu 30°C. Neglijând orice posibilitate de flambaj lateral să se determine tensiunile în barele *BE* şi *CD*. Pentru BE, care este din cupru, $E_{cu} = 1{,}15 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $\alpha_{cu} = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$ /^{o}C, iar pentru C*D*, care este din aluminiu, $E_{cu} = 0{,}62 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $\alpha_{cu} = 23{,}6 \cdot 10^{-6}$ /^{o}C. Aria secțiunii transversale pentru *BE* este $A_{cu} = 650$ mm^2, iar pentru *CD*, $A_{al} = 1300$ mm^2.

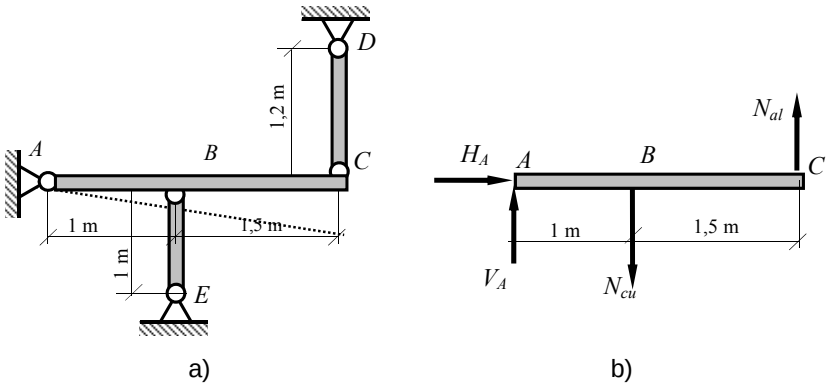


Fig. 3.23.

Datorită variaţiei de temperatură, bara *BE* se va scurta, iar bara *CD* se va alungi, astfel încât eforturile în cele două bare au sensurile indicate în figura 3.23, *b*. Ecuaţia de echilibru static care va conţine cele două eforturi N_{cu} şi N_{al} este o ecuaţie de moment în raport cu articulaţia *A*:

$$\left(\sum M_A\right): \quad N_{cu}\cdot 1 - N_{al}\cdot 2{,}5 = 0$$

Deoarece bara *ABC* este perfect rigidă şi ea se poate roti în jurul punctului *A*, între deformaţiile celor două bare se poate scrie relaţia: $\frac{\Delta l_{cu}}{1} = \frac{\Delta l_{al}}{2{,}5}$, în care Δl_{cu} reprezintă scurtarea barei *BE*, iar Δl_{al}, alungirea barei *CD*. Modificarea totală a lungimii barei *BE* se datoreşte variaţiei de temperatură şi efortului secţional N_{cu}:

$\Delta l_{cu} = \alpha_{cu}\Delta t_{cu} l_{cu} + \frac{N_{cu} l_{cu}}{E_{cu} A_{cu}}$. La fel şi în cazul barei CD: $\Delta l_{al} = \alpha_{al}\Delta t_{al} l_{al} + \frac{N_{al} l_{al}}{E_{al} A_{al}}$.

Înlocuind numeric în relaţia de natură geometrică se obţine:

$$2{,}5\left[16{,}5\cdot 10^{-6}\cdot(-10)\cdot 1000 + \frac{N_{cu}\cdot 1000}{1{,}15\cdot 10^{5}\cdot 650}\right] = 23{,}6\cdot 10^{-6}\cdot 30\cdot 1200 + \frac{N_{cu}\cdot 1200}{0{,}62\cdot 10^{5}\cdot 1300}$$

sau

$$0{,}334 N_{cu} - 0{,}149 N_{al} = 10146.$$

Rezolvând sistemul format din această ecuaţie şi ecuaţia aspectului static se determină eforturile secţionale provocate de variaţi de temperatură: N_{cu} = 36975 N, N_{al} = 14790 N. Cu aceste valori tensiunile din temperatură în cele două bare sunt: σ_{cu} = 58 N/mm^2, σ_{al} = 12 N/mm^2.

Probleme suplimentare

P.3.15. Grinda cu zăbrele din figura 3.24 este solicitată de forţa *P* = 60 kN. Toate barele sunt confecţionate din oţel S235 care are limita

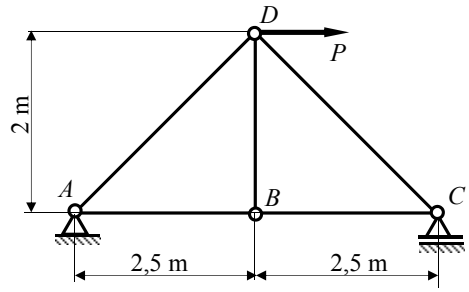


Fig.3.24.

de elasticitate minimă R_e = 235 N/mm^2. Pentru un coeficient de siguranță c = 1,6 să se determine aria necesară pentru barele *AD* şi *BC*.

P.3.16. O bară de oțel are secțiunea A = 100 mm^2 şi este solicitată axial de un sistem de forțe aşa cum este arătat în figura 3.25.. Să se determine alungirea totală a barei. Pentru oțel E = 2,05·10^5 N/mm^2.

P.3.17. O placă plană din oțel de formă trapezoidală are grosimea constantă şi egală cu 13 mm

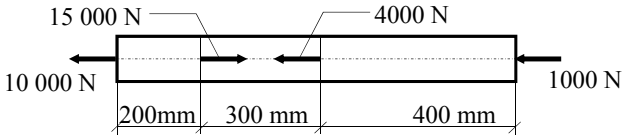


Fig. 3.25.

(fig. 3.26) şi este solicitată axial de o forță de 40 000 N. Să se determine alungirea totală a plăcii. Pentru oțel E = 2,05·10^5 N/mm^2.

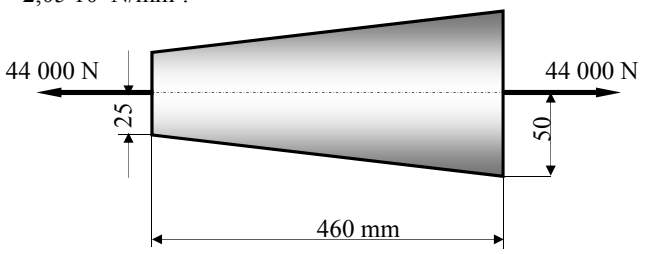


Fig. 3.26.

P.3.18. Grinda cu zăbrele din figura 3.27 este solicitată de două forțe F = 17 kN aplicate după diagonala grinzii. Toate barele sunt din oțel cu E = 2,05·10^5 N/mm^2 şi au aceeaşi secțiune A = 520 mm^2. Să se determine creşterea distanței dintre nodurile *A* şi *C* în funcție de lungimea *l*.

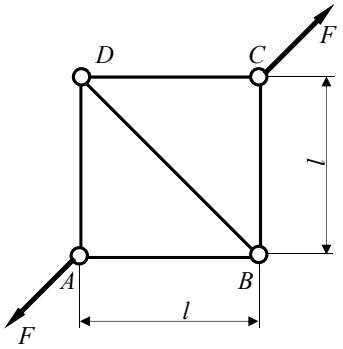


Fig. 3.27.

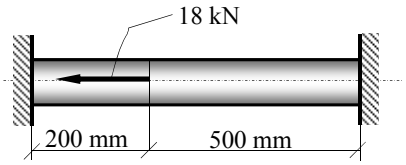


Fig. 3.28.

P.3.19. O bară având aria secţiunii egală cu 1290 mm^2 este încastrată între doi pereţi rigizi şi acţionată de o forţă axială de 18 kN, aşa cum se poate vedea în figura 3.28. Să se determine reacţiunile pereţilor şi alungirea porţiunii din dreapta forţei. Se va considera $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2.

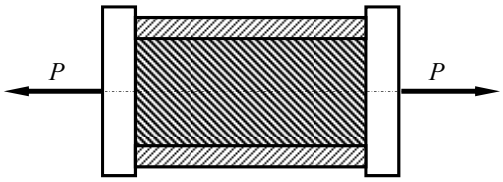


Fig. 3.29.

P.3.20. O platbandă de cupru este montată între două platbande de oţel prin intermediul a două placi perfect rigide, aşa cum este prezentat în figura 3.29. Ansamblul este solicitat axial de o forţă P. Toate cele trei platbande au lăţimea de 100 mm. Platbandele din oţel au grosimea de 6,5 mm, iar platbanda de cupru 20 mm. Ştiind că pentru oţel R_m = 560 N/mm^2 şi $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2, iar pentru cupru, R_m = 200 N/mm^2 şi E = 1,15 N/mm^2, să se determine valoarea maximă a forţei P pe

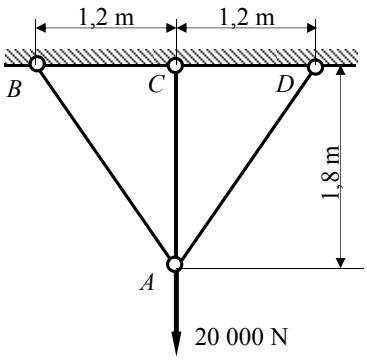


Fig. 3.30.

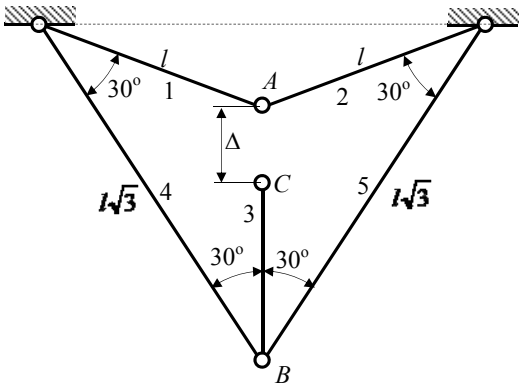


Fig. 3.31.

care o poate suporta ansamblul dacă se consideră un coeficient de siguranţă c = 2.

P.3.21. Trei bare articulate între ele sunt solicitate de o forţă verticală de 20 000 N (fig. 3.30). Barele sunt montate fără tensiuni iniţiale, înainte de aplicarea forţei în A. Încărcare este aplicată lent şi în acelaşi timp temperatura barelor este majorată cu 15°C. Să se determine tensiunile în bare. Barele AB şi AD sunt din cupru şi au aria secţiunii transversale 260 mm^2, iar bara AC este din oţel şi are aria secţiunii 200 mm^2. Pentru oţel $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$ /°C, iar pentru cupru $E = 1{,}15 \cdot 10^5$ N/mm^2 şi $\alpha = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$ /°C.

P.3.22. La montajul barelor din figura 3.31 s-a constatat că punctele A şi C nu coincid, distanţa pe verticală dintre ele fiind Δ. Asamblarea se efectuează forţat astfel încât punctele A şi C să coincidă. Să se determine eforturile secţionale în bare provocate de eroarea de fabricaţie. Toate barele sunt din acelaşi material şi au aceeaşi secţiune.

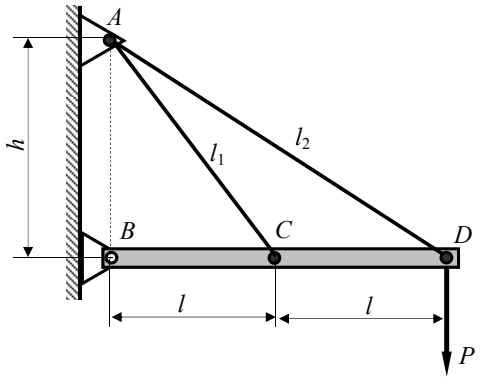


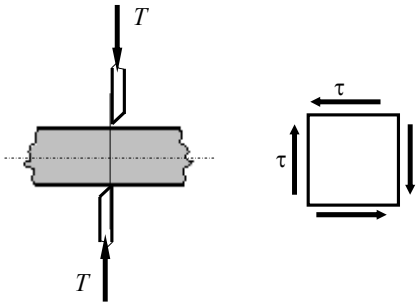
Fig. 3.32.

P.3.23. Bara *BCD*, perfect rigidă, este susținută de două cabluri, aşa cum se vede în figura 3.32. Cele două cabluri sunt montate fără tensiuni inițiale. Se neglijează greutățile proprii, iar cele două cabluri au aceeaşi secțiune *A* şi acelaşi modul de elasticitate *E*. Să se determine tensiunile în fiecare cablu după aplicarea forței *P*.

3.2. FORFECAREA SIMPLĂ A BARELOR DREPTE

S-a văzut (parag. 2.2) că între momentul încovoietor şi forţa tăietoare există relaţia $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T$ ceea ce face ca solicitarea de forfecare să fie însoţită de încovoiere, forfecarea pură apărând numai într-o singură secţiune, acolo unde momentul încovoietor este nul.

Se consideră că o bară este solicitată la forfecare simplă atunci când forfecarea este solicitarea predominantă a barei. Se poate face această ipoteză în cazul pieselor la care se constată că ruperea sau deformaţiilor mari, permanente, apar datorită forfecării, ca de exemplu bara din figura 3.33, *a* asupra căreia acţionează



a) b)

Fig. 3.33.

două cuţite normale pe axa sa. Forţele de acţionare a cuţitelor, notate cu *T*, sunt egale cu forţa tăietoare ce apare în secţiunea din bară determinată de planul cuţitelor. În cazul în care forţele *T* depăşesc o anumită limită bara este forfecată complet. Materialul din care este confecţionată bara se opune tendinţei de forfecare ceea ce înseamnă că în secţiune apar tensiuni tangenţiale τ (fig. 3.33, *b*). Conform principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale, în planele normale pe secţiunea de forfecare apar tensiuni tangenţiale egale cu cele din secţiune şi simetric orientate faţă de muchia comună (fig. 3.33, *b*). Pe feţele exterioare ale barei tensiunile tangenţiale sunt nule, deoarece pe aceste feţe nu acţionează forţe tangenţiale la suprafaţa barei. Rezultă că în secţiunea de forfecare tensiunile tangenţiale τ nu sunt distribuite uniform. În cazul pieselor la care secţiunea de forfecare este mică şi în general pentru elementele de îmbinare (nituri, buloane, pene, cordoane de sudură etc.) se consideră că tensiunile tangenţiale au o

distribuție uniformă pe secțiune. În această situație se poate considera, într-un calcul aproximativ, că valoarea tensiunii tangențiale este:

$$\tau = \frac{T}{A} \tag{3.27}$$

unde T este forța tăietoare din secțiune şi A este aria secțiunii de forfecare.

3.2.1. Calculul îmbinărilor prin nituri ale barelor solicitate la eforturi axiale

Niturile sunt elemente de prindere, folosite la asamblarea a două sau mai multe plăci metalice denumite platbande, aşa cum se poate vedea în figura 3.34. Aceste elemente de asamblare sunt bare mici cu secțiune circulară, având un cap aproximativ semisferic şi o tijă uşor tronconică (fig. 3.34). După ce au fost încălzite la „roşu aprins”, ele sunt introduse în găurile – care au aproximativ acelaşi diametru – făcute în piesele care urmează să fie asamblate (în general

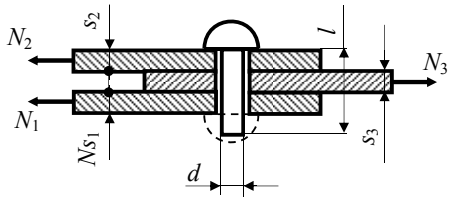
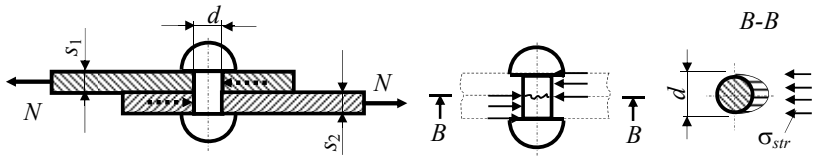


Fig. 3.34.

platbande). Cu ajutorul a două piese groase denumite buterolă şi contra-buterolă şi a unui ciocan pneumatic se formează celălalt cap. După răcire, nitul, datorită contracției, strânge între ele piesele asamblate în dreptul găurilor în care a fost montat. Ca urmare a faptului că piesele îmbinate sunt solicitate axial, se produce o interacțiune între pereții găurilor şi tija nitului, pe toată suprafața acestora (fig. 3.35, *a*). Ca urmare tija nitului este solicitată atât la încovoiere, cât şi la forfecare (fig. 3.35, *b*), secțiunea cea mai periculoasă fiind în planul de separație al pieselor ce au fost asamblate prin intermediul nitului.

Calculul de rezistență al nitului constă într-o predimensionare constructivă şi verificarea capacității lui portante.

Predimensionarea constă în alegerea diametrului nitului (dintre dimensiunile standardizate), ea făcându-se empiric în funcție de grosimea pieselor care se asamblează (a pieselor de strâns). În tabelul 3.3 sunt date recomandările



a) b) c)

Fig. 3.35.

standardului STAS 763 – 66 referitoare la alegerea diametrului nitului.

Neglijând frecarea care apare după asamblarea prin nituire a pieselor, se consideră că niturile cedează fie prin forfecare în secțiunea *B–B* (fig. 3.35, *b*), fie prin strivire (fig. 3.35, *c*).

Tabelul 3.3.

Grosimea minimă a pieselor de strâns *s* [mm]	≤ 5		5–9	7–11	10–14	13–19	≥ 20
Diametrul nitului *d* [mm]	11	14	17	20	23	26	29

Deoarece diametrul nitului este relativ mic, se consideră că în secțiunea de forfecare tensiunile tangențiale au o distribuție uniformă. *Rezistența nitului la forfecare*, adică forța de forfecare capabilă a lui, se determină cu relația:

$$R_{nit}^{f} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot i \cdot \tau_a \tag{3.28}$$

în care: d este diametrul nitului, i – numărul secțiunilor de forfecare (în cazul îmbinării din figura 3.34, $i = 2$, iar în cazul îmbinării din figura 3.35, *a*, $i = 1$), τ_a=0,8σ_a – rezistența admisibilă la forfecare.

Pentru solicitarea de strivire, se convine că forța maximă pe care o poate transmite un nit, adică *rezistența lui la strivire*, pentru ca materialul să nu se strivească, în ipoteza unei distribuții uniforme a acesteia pe suprafața diametrală a nitului (fig. 3.45, *c*), este:

$$R_{nit}^{str} = d \cdot g \cdot \sigma_a^{str} \tag{3.29}$$

unde g este grosimea minimă însumată a pieselor asamblate care lucrează în acelaşi sens (pentru îmbinarea din figura 3.34, $s_1 + s_2 \geq g$= min [$s_1 + s_2$, s_3], iar σ_a^{str} este rezistența la strivire a materialului nitului care poate fi luată $\sigma_a^{str} = 2\sigma_a$.

Rezistența nitului se defineşte astfel:

$$R_{nit} = \min\,[\,R_{nit}^{f}\ ;\ R_{nit}^{str}\,]. \tag{3.30}$$

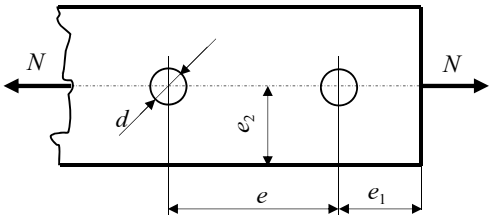


Fig. 3.36.

Calculul îmbinărilor prin nituri constă, în afara determinării diametrului acestora, în determinarea numărului necesar de nituri. Presupunând o încărcare uniformă a tuturor niturilor, numărul de nituri n se determină cu relația:

$$n \geq \frac{N_{cap}}{R_{nit}}, \tag{3.31}$$

unde N_{cap} este efortul capabil al pieselor îmbinate.

Distanțele minime dintre niturile unei îmbinări solicitată la întindere sunt standardizate. De exemplu, pentru îmbinarea din figura 3.36 distanțele prevăzute sunt: $e = 3d$; $e_1 = 2d$; $e_2 = 1{,}5d$.

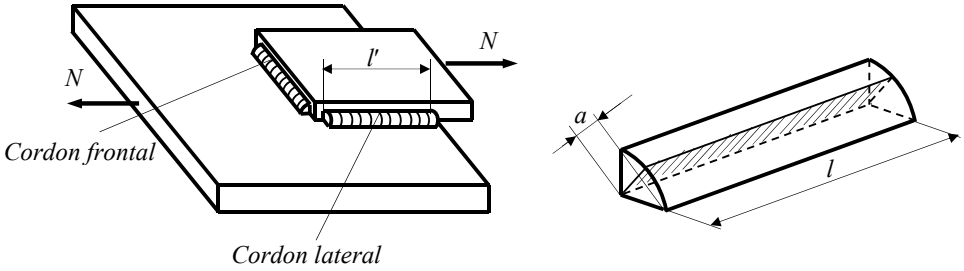
3.2.2. Calculul îmbinărilor prin sudură

Sudarea prin topire a două piese metalice se realizează prin topirea materialului acestora (numit material de bază) în zona unde se realizează îmbinarea şi topirea unui material suplimentar (numit material de adaos). Căldura necesară topirii este furnizată de un arc electric format între un electrod (care constituie materialul de adaos) şi piesele de îmbinat. Prin topire între piese se realizează o baie de material topit care, în urma răcirii, se transformă, prin cristalizare, într-o cusătură sudată (cordon de sudură).

După poziția cordoanelor de sudură față de sensul forței care le solicită se disting: cordoane laterale şi cordoane frontale (fig. 3.37, *a*).

Elementele de calcul ale unui cordon de sudură sunt: grosimea a şi lungimea $l = l' - 2a$, unde l' reprezintă lungimea reală a cordonului de sudură (se consideră că la fiecare capăt al cordonului, grosimea acestuia nu este egală cu a ca urmare a amorsării, respectiv stingerii arcului electric şi deci pe această lungime cordonul nu prea sarcină).

Pentru sudura de colț grosimea sudurii este a conform cu figura 3.37, *b* şi ea poate fi cel mult $a = 0{,}7g$, unde g este cea mai mică grosime a pieselor care se sudează.



a) b)

Fig. 3.37.

Cordonul de sudură este solicitat la forfecare şi secţiunea minimă este cea determinată de grosimea a şi lungimea de calcul l a acestuia (zona haşurată reprezentată în fig. 3.37, *b*). Rezistenţa unui astfel de cordon de sudură este:

$$R_{sud} = a \cdot l_s \cdot \tau_a^{sud} \geq N_{cap}, \tag{3.32}$$

unde $\tau_a^{sud} = 0{,}65\sigma_a$ reprezintă rezistenţa la forfecare a cordonului de sudură, iar N_{cap} este efortul secţional axial capabil pe care îmbinarea îl preia.

Condiţia (3.32) se poate folosi pentru dimensionarea cordonului de sudură numai dacă cele două necunoscute, a şi l_s se exprimă în funcţie de un singur parametru. De obicei, se alege $a \in [0{,}3\text{mm}; 0{,}7g]$ (unde $g = \min [s_1; s_2]$, s_1 şi s_2 fiind grosimile pieselor care se sudează) şi din condiţia (3.32) se calculează lungimea l_s.

Lungimea reală a cordonului de sudură l'_s se determină cu relaţia:

$$l'_s = l_s + 2a, \tag{3.33}$$

deoarece se consideră că, la capete, cordonul de sudură nu are grosimea nominală a, din cauza „arderii” materialului.

Probleme rezolvate

P.3.24. Un singur nit este folosit pentru solidarizarea a două platbande aşa cum este arătat în figura 3.38. Dacă diametrul nitului este d = 20 mm, iar forţa F = 38 kN să se determine tensiunea de forfecare.

Valoarea tensiunii de forfecare se calculează cu formula (3.27) $\tau = T/A$, în care $T = F$, iar A este aria secţiunii nitul. Rezultă:

$$\tau = \frac{37000}{\pi \frac{20^2}{4}} = 118 \text{ N/mm}^2.$$

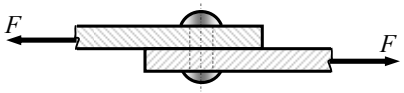


Fig. 3.38.

Deoarece tensiunea tangențială admisibilă este $\tau_a = 0{,}8\sigma_a = 0{,}8 \cdot 150 = 120$ N/mm^2, se constată că nitul nu se va distruge prin forfecare deoarece tensiunea tangențială maximă care se dezvoltă $\tau = 118$ N/mm^2 este mai mică decât tensiunea admisibilă.

P.3.25. În figura 3.39 este prezentat un aparat utilizat la determinarea rezistenței la forfecare a epruvetelor cilindrice. Epruveta cilindrică confecționată din metalul pentru care se determină rezistența la forfecare este prinsă între plăcile A_1A_2 şi B_1B_2. Asupra ei se aplică o forță P prin intermediul plăcii C. Să se determine forța P necesară forfecării unei epruvete cu diametrul $d = 20$ mm, confecționată dintr-un material a cărui tensiune de forfecare admisibilă este $\tau_a = 90$ N/mm^2.

Având în vedere că numărul secțiunilor de forfecare este $i = 2$, aplicând formula (3.28) forța necesară forfecării epruvetei este:

$$P \geq T_{cap} = A \cdot i \cdot \tau_a = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} \cdot 2 \cdot 90 = 56550 \text{ N}.$$

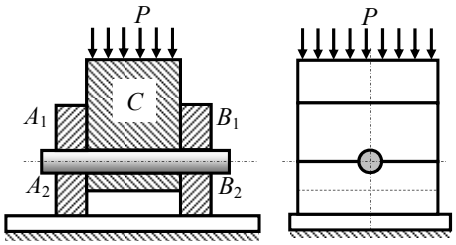


Fig. 3.39.

P.3.26. Barele BD şi CD (fig. 3.40, *a*), alcătuite din câte două platbande din oțel, sunt solicitate de forța $P = 180$ kN. Oțelul din care sunt confecționate platbandele are rezistența admisibilă $\sigma_a = 150$ N/mm^2 şi $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ N/mm^2. Prinderea platbandelor se face prin nituri. Să se dimensioneze barele pentru $h = 10b$ şi să se determine numărul necesar de nituri.

Sistemul din figura 3.40, *a* este simetric, atât geometric cât şi mecanic. Din această cauză eforturile secționale în cele două bare sunt egale. Din izolarea nodului D şi din ecuația de proiecție a tuturor forțelor pe verticală se obține:

$$N_{BD} = N_{CD} = \frac{P}{2\cos 60^0} = \frac{180}{2\cos 60^0} = 180 \text{ kN}.$$

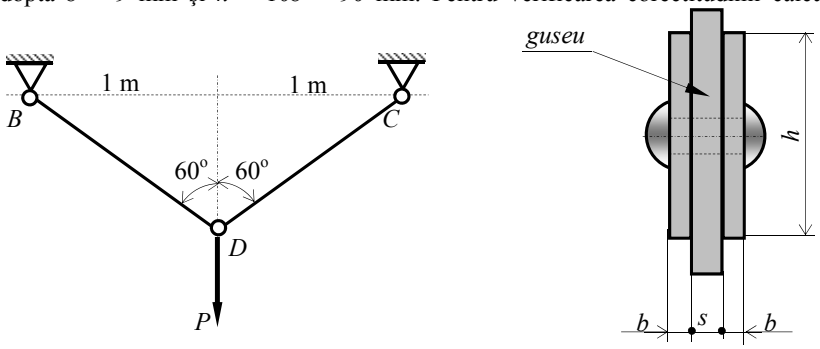
Barele fiind solicitate la întindere pentru dimensionare se foloseşte relația (3.10). Se calculează mai întâi aria necesară:

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{180000}{150} = 1200 \text{ mm}^2.$$

Deoarece fiecare bară este alcătuită din două platbande $A_{\text{dim}} = 2bh$ şi fiindcă s-a adoptat $h = 10b$, rezultă $A_{\text{dim}} = 20b^2$. Prinderea platbandelor făcându-se prin nituri, secțiunile barelor au slăbiri fapt pentru care $A_{\text{dim}} = 1{,}15\, A_{nec}$, egalitate din care rezultă valoarea lui b:

$$b = \sqrt{\frac{1{,}15 \cdot 1200}{20}} = 8{,}3 \text{ mm}.$$

Se adoptă b = 9 mm şi h = 10b = 90 mm. Pentru verificarea corectitudinii calculelor se



a) b)

Fig. 3.40.

foloseşte relaţia (3.11) în care aria netă efectivă a barei este $A_n^{ef} = 2b(h-d)$, d reprezentând diametrul nitului. Pentru determinarea lui d se foloseşte tabelul 3.3 alegându-se d = 20 mm. Rezultă $A_n^{ef} = 2 \cdot 9 \cdot (90-20) = 1260$ mm^2. Condiţia de verificare (3.11)

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{180000}{1260} = 143 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$$

este îndeplinită.

Pentru determinarea numărului de nituri necesar se calculează mai întâi rezistenţa nitului la forfecare cu (3.28) şi la strivire cu (3.29). Se obţine:

$$R_{nit}^{f} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} \cdot 2 \cdot (0{,}8 \cdot 150) = 75398 \text{ N},$$

deoarece nitul are două secţiuni de forfecare;

$$R_{nit}^{str} = 20 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 150) = 60000 \text{ N}$$

deoarece s-a adoptat o grosime a guseului $s = b + 1$ mm = 10 mm.

Numărul de nituri se determină astfel:

$$n \geq \frac{N_{cap}}{R_{nit}} = \frac{\sigma_a A_n^{ef}}{R_{nit}} = \frac{150 \cdot 1260}{60000} = 3{,}15 .$$

Se adoptă n = 4 nituri.

P.3.27. O roată de curea este fixată pe un arbore de diametru d = 40 mm prin intermediul unei pene longitudinale aşa cum se poate vedea în figura 3.41. Forţele F_1 şi F_2, din cele două ramuri ale curelei, dezvoltă un moment de torsiune M_t = 1 kNm. Pana are dimensiunile în secţiune 6 mm x 8 mm, iar lungimea de 80 mm. Să se afle tensiunile de forfecare şi de strivire din pană.

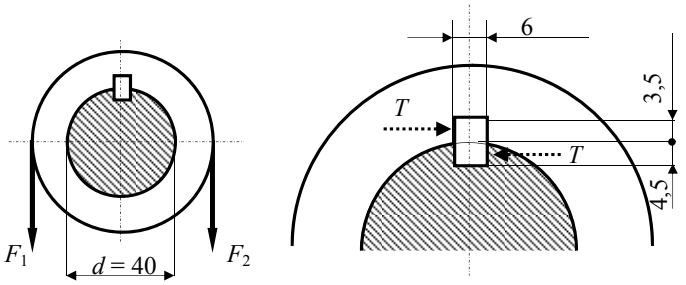


Fig. 3.41.

Datorită momentului de torsiune M_t asupra penei acționează o forță distribuită a cărei rezultantă este

$$T = \frac{2M_t}{d} = \frac{2 \cdot 10^6}{40} = 50000 \text{ N}.$$

Această forță solicită pana la forfecare şi la strivire. Aria secțiunii de forfecare este (v. fig. 3.42) $A_f = 6 \cdot 80 = 480$ mm^2 şi, în consecință, tensiunea de forfecare va avea valoarea:

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{50000}{480} = 104 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece suprafața minimă pe care se distribuie forța produsă de momentul M_t este $A_s = 3{,}5 \cdot 80 = 280$ mm^2 tensiunea de strivire din pană are valoarea

$$\sigma = \frac{T}{A_s} = \frac{50000}{280} = 179 \text{ N/mm}^2.$$

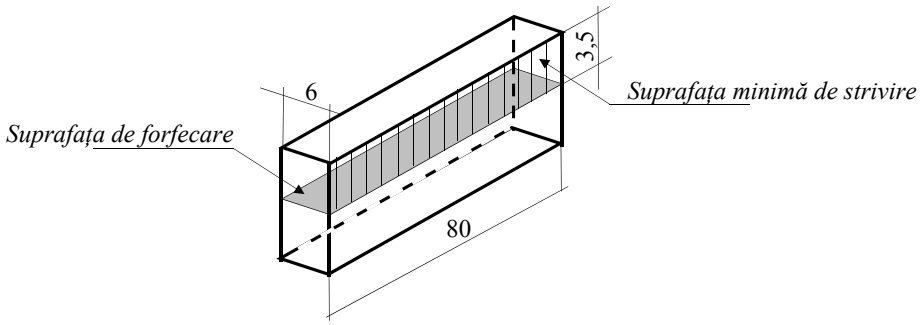


Fig. 3.42.

P.3.28. Două placi sunt solidarizate prin intermediul a două cordoane de sudură aşa cum se poate vedea în figura 3.43. Forța F = 160 kN se consideră că este aplicată la jumătatea distanței

dintre cordoanele de sudură. Să se dimensioneze cordoanele de sudură. Se va considera $\sigma_a = 150$ N/mm^2.

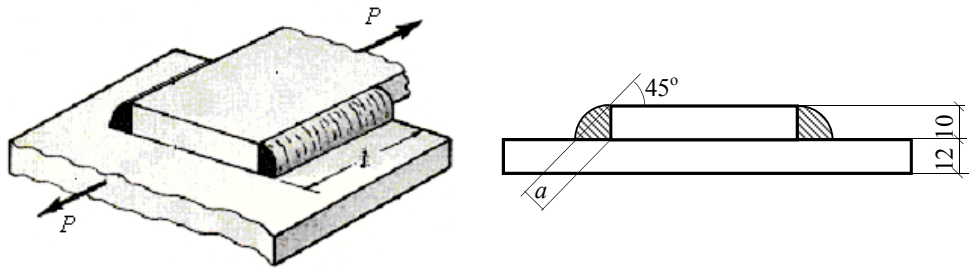


Fig. 3.43.

Deoarece forța F este aplicată la jumătatea distanței dintre cordoanele de sudură, acestea vor fi solicitate în mod egal cu forța:

$$N = \frac{F}{2} = \frac{160}{2} = 80 \text{ kN},$$

şi, în consecință, vor avea aceeaşi lungime.

Pentru calculul dimensiunilor cordoanelor de sudură se alege $a = 0{,}7g = 0{,}7 \cdot 10 = 7$ mm, deoarece $g = \min [10; 12] = 10$ mm (v. fig. 3.43). Lungimea cordonului de sudură se determină cu relația (3.32):

$$l_s = \frac{N}{a \cdot \tau_a^{sud}} = \frac{80000}{7 \cdot (0{,}65 \cdot 150)} = 117 \text{ mm}.$$

Lungimea reală a cordoanelor de sudură conform (3.33) este:

$$l_s' = 117 + 2 \cdot 7 = 131 \text{ mm}.$$

P.3.29. Barele unei grinzi cu zăbrele sunt alcătuite din câte două corniere cu brațele inegale. Prinderea barelor la noduri se face prin sudură. În bara cea mai solicitată efortul axial este $N = 140$ kN. Să se dimensioneze această bară şi să se calculeze prinderea. Rezistența admisibilă a materialului din care sunt confecționate cornierele este $\sigma_a = 150$ N/mm^2.

Bara este solicitată la întindere fapt pentru care dimensionarea se face cu formula (3.10):

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{140000}{150} = 933{,}33 \text{ mm}^2 = A_{dim} = 2 \cdot A_{corn}.$$

Aria necesară pentru o singură cornieră este $A_{corn} = 933{,}33/2 = 466{,}67$ mm^2. Se alege o cornieră L 40x60x5 care are aria secțiunii $A_{br} = 479$ mm^2 şi $e = 19{,}6$ mm. Condiția de verificare (3.11)

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{140000}{2 \cdot 479} = 146 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a.$$

este îndeplinită.

La noduri, efortul axial din fiecare bară este preluat de guseu prin intermediul cordoanelor de sudură, după cum se poate vedea în figura 3.44, *a*. Ca măsură suplimentară de siguranță calculul

prinderii prin sudură se face cu efortul capabil $N_{cap} = A^{ef} \cdot \sigma_a = 2 \cdot 479 \cdot 150 = 143700$ N în loc de efortul $N = 140000$ N. Valorile eforturilor N_1 şi N_2, preluate de cordoanele de sudură, se determină din condiția ca într-un punct de pe axa cornierei torsorul celor două eforturi să fie echivalent cu o singură forță dirijată după axă, de mărime egală cu $N_{cap}/2$ şi de sens contrar cu aceasta. Această condiție conduce la următoarele ecuații:

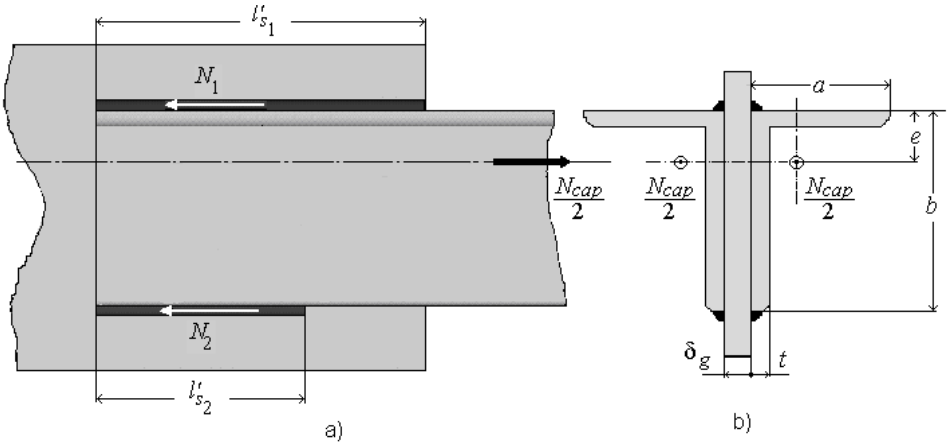


Fig. 3.44.

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = \dfrac{N_{cap}}{2} \\ N_1 \cdot e - N_2 (b - e) = 0 \end{cases}$$

din care rezultă:

$$N_1 = \frac{N_{cap}}{2} \frac{b-e}{b} = \frac{143700}{2} \cdot \frac{60 - 19{,}6}{60} = 48379 \text{ N};$$

$$N_2 = \frac{N_{cap}}{2} \frac{e}{b} = \frac{143700}{2} \cdot \frac{19{,}6}{60} = 23471 \text{ N}.$$

Cu relația (3.32) se poate determina lungimea fiecărui cordon de sudură.

Pentru primul cordon de sudură se alege $a_1 = 0{,}7 \cdot 8 = 5{,}6$ mm deoarece $g = \min [\delta_g; a] = [8; 40] = 8$ mm (vezi fig. 3.50,b). Lungimea cordonului de sudură este:

$$l_{1s} = \frac{N_1}{a_1 \tau_a^{sud}} = \frac{48379}{5{,}6 \cdot (0{,}65 \cdot 150)} = 88{,}6 \text{ mm}.$$

Lungimea reală a primului cordon de sudură conform (3.33) este:

$$l'_{1s} = 88{,}6 + 2 \cdot 5{,}6 \approx 100 \text{ mm}.$$

Analog, pentru cordonul doi de sudură se alege $a_1 = 0{,}7 \cdot 5 = 3{,}5$ mm deoarece $g = \min[\delta_g; t] = [8; 5] = 5$ mm (vezi fig. 3.44, *b*). Rezultă:

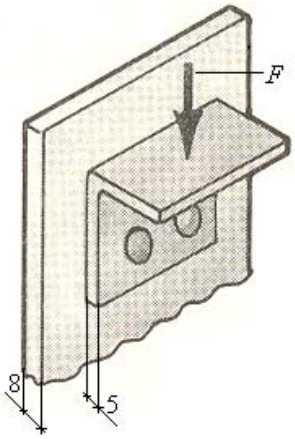


Fig. 3.45.

$$l_{1s} = \frac{N_2}{a_2 \tau_a^{sud}} = \frac{23471}{3{,}5 \cdot (0{,}65 \cdot 150)} = 68{,}8 \text{ mm}.$$

Lungimea reală a cordonului de sudură conform (3.33) este:

$$l'_{2s} = 68{,}8 + 2 \cdot 3{,}5 \approx 76 \text{ mm}.$$

P.3.30. În cadrul construcțiilor metalice pentru transmiterea solicitărilor structurilor orizontale la cele verticale se folosesc cleme metalice de forma celei prezentate în figura 3.45. Cunoscând că cele două nituri au diametrul d = 14 mm şi rezistența admisibilă σ_a = 150 N/mm^2, să se determine forța maximă F care poate fi preluată şi transmisă de clema metalică.

Se va considera că planul forței F se află foarte apropiat de planul de forfecare al niturilor. Forța maximă care poate fi preluată de clema metalică este:

$$F \leq N_{cap} = n \cdot R_{\text{nit}},$$

în care n = 2 este numărul de nituri iar rezistența unui nit R_{nit} se determină cu relația (3.30). Rezistența la forfecare a unui nit, conform (3.28):

$$R_{nit}^{f} = \frac{\pi \cdot 14^2}{2} \cdot 1 \cdot (0{,}8 \cdot 150) = 18472{,}6 \text{ N}$$

deoarece fiecare nit are o singură secțiune de forfecare.

Grosimea clemei metalice fiind mai mică decât grosimea guseului, rezistența la strivire a unui nit, conform cu (3.29):

$$R_{nit}^{str} = 14 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 150) = 21000 \text{ N}.$$

Rezultă

$$R_{nit} = \min[18472{,}6; 21000] = 18472{,}6 \text{ N}.$$

Forța maximă pe care o poate transmite clema metalică este:

$$F = 2 \cdot 18472{,}6 = 36945{,}2 \text{ N} \approx 37 \text{ tf}.$$

P.3.31. O bară din profil U10 (fig. 3.46) cu aria secțiunii transversale A = 1350 mm^2, solicitată de o forță P = 200 kN, este sudată de un guseu prin două cordoane de sudură de lungime l = 220 mm şi grosime a = 5 mm. Să se verifice profilul şi cordoanele de sudură dacă σ_a = 150 N/mm^2.

Condiția de rezistență a profilului U10 solicitat la tracțiune este îndeplinită pentru că:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{P}{A} = \frac{200000}{1350} = 148 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece fiecare cordon de sudură preia un efort egal cu $P/2$ tensiunea maximă tangențială (de forfecare) care se dezvoltă în cordoanele de sudură este:

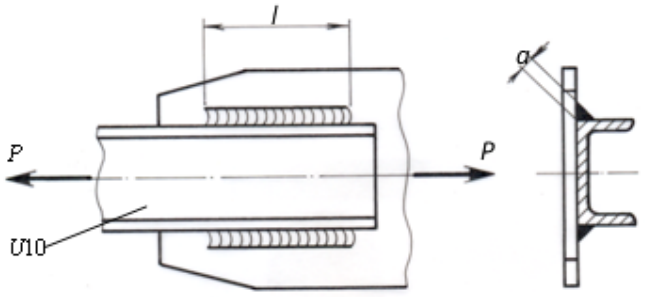


Fig. 3.46.

$$\tau_{sud} = \frac{200000}{2 \cdot 5 \cdot 220} = 90{,}9 \text{ N/mm}^2.$$

Cele două cordoane de sudură sun corect dimensionate deoarece:

$$\tau_{sud} = 90{,}9 \text{ N/mm}^2 < \tau_a^{sud} = 0{,}65 \cdot 150 = 97{,}5 \text{ N/mm}^2.$$

Probleme suplimentare

P.3.32. Să se verifice şurubul îmbinării din figura 3.53, cu $\sigma_a = 150$ N/mm^2.

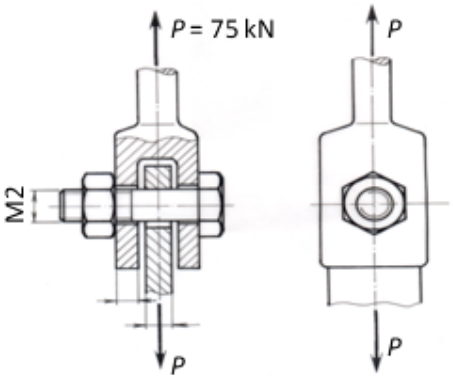


Fig. 3.47.

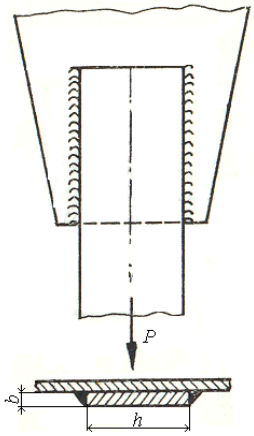


Fig. 3.48.

P.3.33. O platbandă solicitată axial cu forța P = 240 kN este prinsă de un guseu prin intermediul a două cordoane de sudură aşa cum este prezentat în figura 3.48. Ştiind că raportul dimensiunilor secțiunii este h/b = 10 şi că σ_a = 150 N/mm^2, să se dimensioneze platbanda şi cordoanele de sudură.

3.3. CARACTERISTICILE GEOMETRICE ALE SECŢIUNILOR PLANE

Determinarea tensiunilor şi deformaţiilor necesare calculelor de rezistenţă la bare implică cunoaşterea unor caracteristici geometrice care depind de forma şi dimensiunile secţiunii transversale ale acestora, ca de exemplu: aria, centrul de greutate, momente statice, momente de inerţie, raze de inerţie etc.

3.3.1. Momente statice

Pentru suprafaţa plană oarecare din figura 3.49, raportată la sistemul de axe rectangulare $y_1O_1z_1$, se alege un element de arie dA în punctul P de coordonate (y_1, z_1).

Momentele statice ale acestei suprafeţe faţă de axele O_1z_1, respectiv O_1y_1 sunt definite de expresiile:

$$S_{z_1} = \int_{(A)} y_1 \mathrm{d}A \ ; \ S_{y_1} = \int_{(A)} z_1 \mathrm{d}A . \quad (3.34)$$

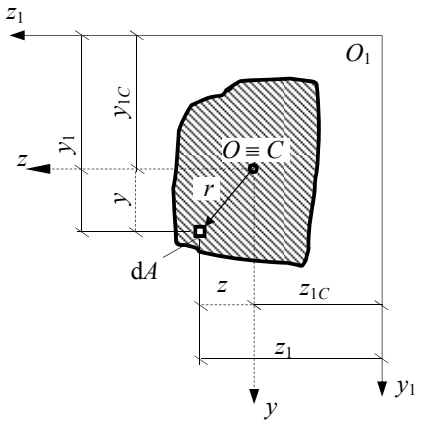


Fig. 3.49.

Deoarece coordonatele (y_{1C}, z_{1C}) [17] ale centrului de greutate C al suprafeţei considerate se determină cu relaţiile:

$$y_{1C} = \frac{\int_{(A)} y_1 \mathrm{d}A}{A}; \qquad z_{1C} = \frac{\int_{(A)} z_1 \mathrm{d}A}{A}; \quad (3.35)$$

momentele statice se pot exprima şi astfel:

$$S_{y_1} = A \cdot z_{1C} \ ; \ S_{z_1} = A \cdot y_{1C} . \quad (3.36)$$

Sistemul de axe rectangulare yOz, cu originea în centrul de greutate al suprafeţei se numeşte *sistem central de axe*, iar axele respective, *axe centrale*.

Momentele statice ale suprafeţei considerate, în raport cu sistemul central de axe yOz, sunt nule deoarece $y_C = z_C = 0$.

3.3.2. Momente de inerţie

Pentru aceeaşi suprafaţă oarecare (fig. 3.49) se definesc următoarele momente de inerţie geometrice:

– momentele de inerţie în raport cu axa y, respectiv z:

$$I_y = \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A \ ; \ I_z = \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A, \tag{3.37}$$

denumite momente de inerţie axiale;

– momentul de inerţie centrifugal:

$$I_{zy} = \int_{(A)} zy \mathrm{d}A; \tag{3.38}$$

– momentul de inerţie în raport cu punctul O:

$$I_O = \int_{(A)} r^2 \mathrm{d}A. \tag{3.39}$$

Deoarece $r^2 = y^2 + z^2$ se deduce că:

$$I_O = I_y + I_z, \tag{3.40}$$

relaţie valabilă oricare ar fi sistemul de referinţă yOz.

Aceste momente de inerţie geometrice au ca unităţi de măsură: $[\, I \,] = \mathrm{L}^4$.

Dacă axele sistemului de referinţă yOz trec prin centrul de greutate al suprafeţei atunci I_y şi I_z se numesc *momente de inerţie axiale centrale*.

3.3.2.1. Momentele de inerţie axiale centrale ale unei suprafeţe circulare

Folosind coordonatele polare r şi φ, elementul de suprafaţă este $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ (fig. 3.50). În acest caz momentul de inerţie polar este:

$$I_O = \int_{(A)} r^2 \mathrm{d}A = \iint r^3 \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{D/2} r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi D^4}{32}, \tag{3.41}$$

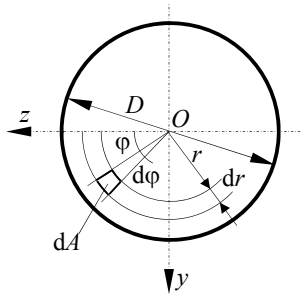


Fig.3.50.

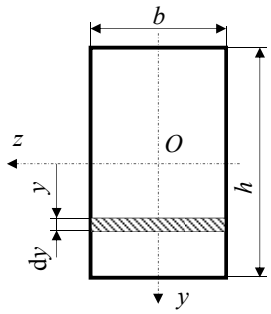


Fig. 3.51.

unde D este diametrul suprafeței circulare.

Deoarece axele Oz şi Oy sunt axe de simetrie, există relația $I_y = I_z$ şi deci, în baza egalității (3.40):

$$I_y = I_z = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi D^4}{64}. \tag{3.42}$$

3.3.2.2. Momentele de inerţie axiale centrale ale unei suprafeţe dreptunghiulare

Pentru calculul momentului de inerție axial I_z al dreptunghiului din figura 3.51, la distanța y de axa Oz s-a luat un element de suprafață $\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$. Aplicând a doua relație (3.37) rezultă:

$$I_z = \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b \mathrm{d}y = b\left.\frac{y^3}{4}\right|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}. \tag{3.43}$$

Procedând analog în raport cu axa Oy (elementul de arie $\mathrm{d}A$ fiind ales de această data paralel cu axa Oy), $\mathrm{d}A = h\mathrm{d}z$, se obține:

$$I_y = \frac{hb^3}{12}. \tag{3.44}$$

Deoarece axele Oy şi Oz sunt axe de simetrie, prin extrapolarea proprietăților momentelor de inerție masice utilizate în mecanica teoretică, momentul de inerție centrifugal $I_{zy} = 0$

3.3.3. Variaţia momentelor de inerţie la translaţia axelor

Se consideră suprafața oarecare A din figura 3.52 raportată la sistemul de axe yOz care are originea în centrul de greutate al acesteia.

Se propune determinarea momentele de inerție axiale ale suprafeței considerate în raport cu axele O_1z_1 şi O_1y_1 , paralele cu axele Oz, respectiv Oy, în funcție de momentele de inerție I_z, I_y şi I_{zy}, presupuse cunoscute.

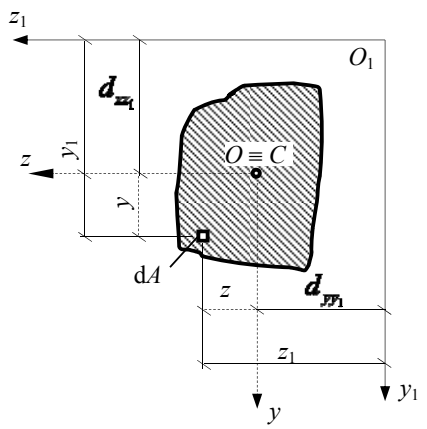


Fig. 3.52.

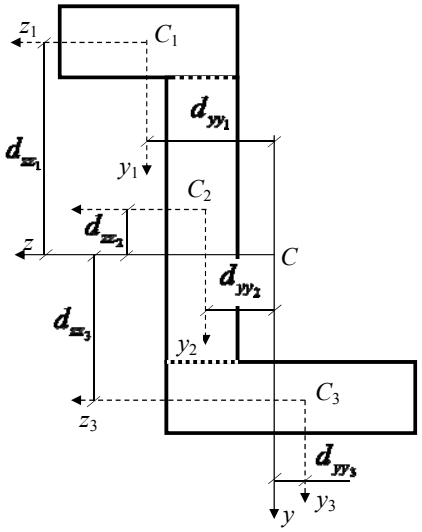


Fig. 3.53.

Cu notațiile din figura 3.52 se poate scrie $y_1 = y + d_{zz_1}$ şi deci:

$$I_{z_1} = \int_{(A)} y_1^2 \mathrm{d}A = \int (y + d_{zz_1})^2 dA = \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A + 2d_{zz_1} \int_{(A)} y \mathrm{d}A + d_{zz_1}^2 \int_{(A)} \mathrm{d}A$$

din care rezultă

$$I_{z_1} = I_z + Ad_{zz_1}^2 \tag{3.45}$$

deoarece $\int_{(A)} y \mathrm{d}A = S_z = 0$, axă Oz fiind axă centrală .

Analog

$$I_{y_1} = I_y + Ad_{yy_1}^2 . \tag{3.46}$$

Pentru momentul de inerţie centrifugal se poate scrie:

$$I_{z_1y_1} = \int_{(A)} y_1 z_1 \mathrm{d}A = \int_{(A)} (y + d_{zz_1})(z + d_{yy_1})\mathrm{d}A =$$

$$= \int_{(A)} yz\mathrm{d}A + d_{zz_1}\int_{(A)} z\mathrm{d}A + d_{yy_1}\int_{(A)} y\mathrm{d}A + d_{yy_1}d_{zz_1}\int_{(A)} \mathrm{d}A$$

şi, deci:

$$I_{z_1y_1} = I_{zy} + Ad_{yy_1}d_{zz_1} \tag{3.47}$$

Relaţiile (3.45), (3.46) şi (3.47) sunt utile la calculul momentelor de inerţie ale figurilor compuse. De exemplu pentru suprafaţa plană din figura 3.53 momentele de inerţie se determină cu relaţiile:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_1^3 (I_{z_i}^i + A_i d_{zz_i}^2) \\ I_y &= \sum_1^3 (I_{y_i}^i + A_i d_{yy_i}^2) \\ I_{zy} &= \sum_1^3 (I_{z_iy_i}^i + A_i d_{zz_i} d_{yy_i}) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Se poate constata că pentru suprafaţa din figura 3.53, momentele de inerţie centrifugale ale celor trei dreptunghiuri, în care aceasta a fost discretizată, sunt nule, $I_{z_iy_i} = 0$, deoarece axele C_iz_i, C_iy_i sunt axe de simetrie.

3.3.4. Variaţia momentelor de inerţie la rotaţia axelor

Fie suprafaţa A şi sistemul de axe yOz faţă de care se cunosc momentele de inerţie (fig. 3.54). Ne propunem să determinăm momentele de inerţie faţă de sistemul de axe y_1Oz_1 rotit cu unghiul α faţă de sistemul de axe yOz. Se precizează că $\alpha \in [0, 2\pi]$ şi are sensul pozitiv indicat în figura 3.54.

Fie P centrul de greutate al elementului de suprafaţă dA, iar $\bar{r}$ vectorul lui de poziţie. Deoarece:

$$\bar{r} = y\bar{j} + z\bar{k} = y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1 ,$$

între coordonatele (y, z) şi (y_1, z_1) există relațiile:

$$\begin{cases} y_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha \\ z_1 = -y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases} \qquad (3.49)$$

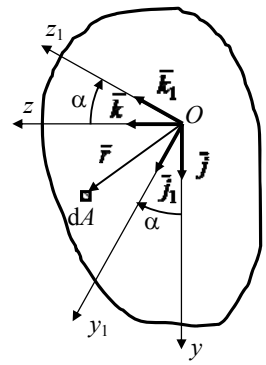


Fig. 3.54.

În baza relațiilor (3.49) şi (3.37) se poate scrie:

$$I_{z_1} = \int_{(A)} y_1^2 \mathrm{d}A = \int_{(A)} (y\cos\alpha + z\sin\alpha)^2 \mathrm{d}A =$$

$$= \cos^2\alpha \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A + \sin^2\alpha \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A + 2\cos\alpha\sin\alpha \int_{(A)} yz\mathrm{d}A,$$

de unde rezultă:

$$I_{z_1} = I_z \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha + 2I_{yz}\sin\alpha\cos\alpha,$$

sau:

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha \qquad (3.50)$$

Pentru axa Oy_1 se deduce în mod similar:

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \qquad (3.51)$$

Pentru momentul de inerție centrifugal se poate scrie:

$$I_{z_1y_1} = \int_{(A)} y_1 z_1 \mathrm{d}A = \int_{(A)} (y\cos\alpha + z\sin\alpha)(-y\sin\alpha + z\cos\alpha)\mathrm{d}A =$$

$$= -\sin\alpha\cos\alpha \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A + \sin\alpha\cos\alpha \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A + \cos^2\alpha \int_{(A)} yz\mathrm{d}A - \sin^2\alpha \int_{(A)} yz\mathrm{d}A,$$

şi deci

$$I_{z_1y_1} = -\frac{I_z}{2}\sin 2\alpha + \frac{I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha,$$

sau

$$I_{z_1y_1} = -\frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha \qquad (3.52)$$

Relațiile (3.50), (3.51) şi (3.52) permit determinarea momentelor de inerție în raport cu oricare pereche de axe rectangulare y_1Oz_1 în funcție de I_z, I_y, I_{zy} şi unghiul α.

Se constată că momentele de inerție $I_{z_1}, I_{y_1}, I_{z_1y_1}$ sunt funcții de (2α) şi deci ele vor putea avea şi valori extreme, minime sau maxime.

De exemplu, pentru a determina valoarea unghiului α pentru care I_{z_1} şi I_{y_1} admit o valoare extremă, se derivează relațiile (3.50) şi (3.51) în funcție de (2α).

Se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_{z_1}}{\mathrm{d}(2\alpha)} &= -\frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha = I_{z_1y_1} \\ \frac{\mathrm{d}I_{y_1}}{\mathrm{d}(2\alpha)} &= \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha - I_{zy}\cos 2\alpha = -I_{z_1y_1} \end{aligned} \tag{3.53}$$

Din relațiile (3.53) se constată că momentele de inerție axiale I_{z_1} şi I_{y_1} admit valori extreme atunci când momentul de inerție centrifugal $I_{z_1y_1}$ se anulează adică:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} \tag{3.54}$$

Se constată că pentru $\alpha \in [0, 2\pi]$ relația (3.54) admite două soluții $2\alpha_0$ şi $2\alpha_0 + \pi$.

Rezultă că există două direcții cărora le corespund două axe, perpendiculare între ele (conjugate), față de care momentele de inerție axiale I_{z_1} şi I_{y_1} au valori extreme, iar $I_{z_1y_1} = 0$.

Axele față de care momentul de inerție centrifugal este nul, iar momentele de inerție axiale au valori extreme se numesc *axe principale de inerție*, iar momentele de inerție axiale respective, *momente de inerție axiale principale*.

Valoarea momentelor de inerție principale se obține înlocuind relația(3.54) în (3.50) şi (3.51). Rezultă:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \\ I_2 &= \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Din însumarea celor două momente de inerție axiale principale I_1 şi I_2 rezultă

$$I_1 + I_2 = I_z + I_y = I_o \tag{3.56}$$

care exprimă invarianța sumei momentelor de inerție axiale la rotația axelor.

Din relațiile (3.55) se constată că $I_1 > I_2$, cu alte cuvinte I_1 este momentul de inerție axial maxim, iar I_2 momentul de inerție minim.

Pentru a determina direcțiile axelor principale de inerție *I*, *II* se derivează de două ori relația (3.51) în funcție de (2α). Ținând seama de (3.54) se obține:

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_{y_1}}{\mathrm{d}(2\alpha)^2} = \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{zy}\sin 2\alpha = \left[\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2\right]\cos^2 2\alpha_0 \frac{\tan\alpha_0}{I_{zy}}, \tag{3.57}$$

al cărui semn este dat de raportul $\dfrac{\tan\alpha_0}{I_{zy}}$.

Pentru valoarea maximă I_1 trebuie îndeplinită condiția $\dfrac{\tan\alpha_0}{I_{zy}} < 0$ adică, dacă $I_{zy} < 0$ atunci $\tan\alpha_0 > 0 \Rightarrow \alpha < \pi/2$ şi deci prima direcție principală este indicată de α_0, iar dacă $I_{zy} > 0$ atunci $\tan\alpha_0 < 0 \Rightarrow \alpha > \pi/2$, prima direcție principală fiind indicată de $\alpha_0 + \pi/2$.

Dacă axele principale de inerție trec prin centrul de greutate al suprafeței atunci ele se numesc axe centrale principale de inerție.

Din cele prezentate anterior rezultă că dacă o suprafață admite o axă de simetrie atunci acea axă este axă centrală principală de inerție. Orice axă perpendiculară pe o axă de simetrie este axă principală de inerție, iar dacă axa trece şi prin centrul de greutate al secțiuni, atunci ea este axă centrală principală de inerție.

Probleme rezolvate

P.3.34. Să se determine momentul de inerție al unui triunghi oarecare în raport cu o axă care coincide cu baza lui.

Să raportăm triunghiul la un sistem de referință aşa cum este prezentat în figura 3.55. Momentul de inerție al triunghiului în raport cu baza orizontală este:

$$I_z = \int_{(A)} y^2 \mathrm{d}A.$$

La depărtarea y de bază se consideră un element de suprafață dA = sdy. Din triunghiuri asemenea se poate scrie $s/b = (h - y)/h$. Făcând substituțiile necesare rezultă:

$$I_z = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h - y)\mathrm{d}y = \frac{b}{h}\left[h\int_0^h y^2 \mathrm{d}y - \int_0^h y^3 \mathrm{d}y\right] = \frac{1}{12}bh^3.$$

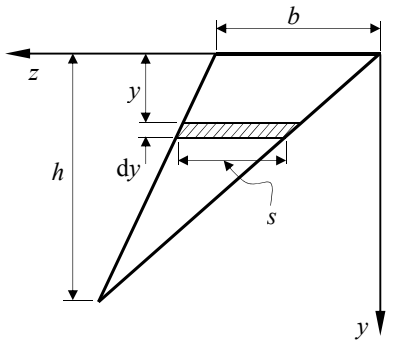


Fig. 3.55.

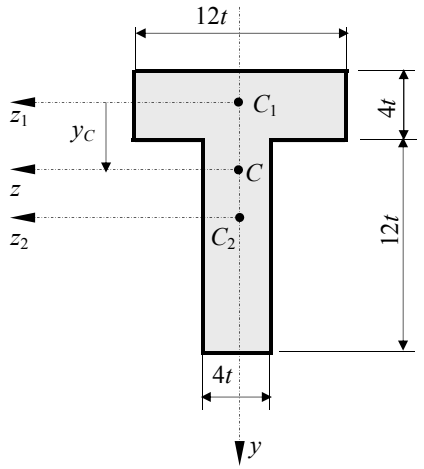


Fig. 3.56.

P.3.35. Pentru secțiunea din figura 3.56 să se determine momentele de inerție axiale centrale principale.

Deoarece axa y este axă de simetrie pentru secțiunea considerată, ea este automat axă centrală principală de inerție. Cum axa z este perpendiculară pe axa y şi trece prin centrul de greutate al secțiunii este şi ea axă centrală principală de inerție. Pentru calculul momentelor de inerție I_y şi I_z trebuie calculată poziția centrului de greutate al secțiunii adică y_C. Pentru aceasta se împarte secțiunea în două suprafețe dreptunghiulare cu centrele de greutate în C_1, respectiv C_2. În conformitate cu notațiile din figura 3.56 rezultă:

$$y_C = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{4t \cdot 12t \cdot (2t + 6t)}{4t \cdot 12t + 4t \cdot 12t} = 4t\,.$$

Aplicând teorema lui Steiner privind variația momentelor de inerție la translația axelor, exprimată de relațiile (3.48), rezultă:

$$I_z = \left[\frac{(4t)^3 \cdot 12t}{12} + 4t \cdot 12t \cdot (4t)^2\right] + \left[\frac{(12t)^3 \cdot 4t}{12} + 4t \cdot 12t \cdot (4t)^2\right] = 2176t^4$$

$$I_y = \left[\frac{(12t)^3 \cdot 4t}{12}\right] + \left[\frac{(4t)^3 \cdot 12t}{12}\right] = 640t^4\,.$$

Deoarece axele y şi z sunt axe principale de inerție momentul de inerție centrifugal $I_{zy} = 0$.

P.3.36. Pentru secțiunea din figura 3.57 să se determine momentele de inerție centrale principale şi direcțiile axelor principale de inerție.

Pentru calculul momentelor principale de inerție este necesară determinarea mai întâi a momentelor de inerție I_y, I_z şi I_{zy} în raport cu axele centrale z şi y ce trec prin centrul de greutate al secțiunii.

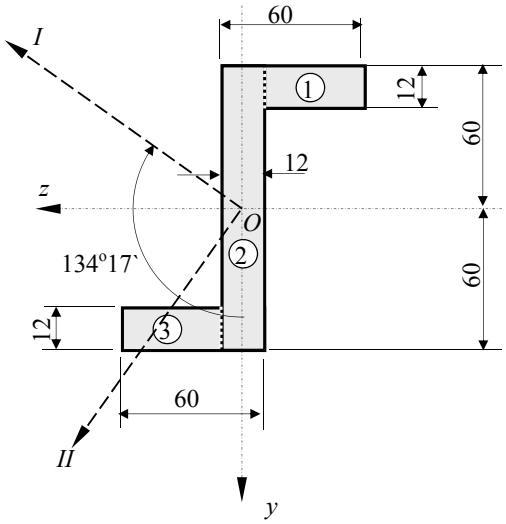


Fig. 3.57.

Se poate constata uşor că axele *z* şi *y* sunt axe centrale deoarece centrul de greutate al secţiunii este în punctul *O*.

Secţiunea se poate împărţi în trei arii dreptunghiulare 1, 2 şi 3 aşa cum este arătat în figura 3.57. În baza relaţiilor (3.48) se obţine:

$$I_z = 2\cdot\left[\frac{12^3\cdot(60-12)}{12}+12\cdot(60-12)\cdot(60-6)^2\right]+\left[\frac{120^3\cdot 12}{12}\right]=5{,}101056\cdot 10^6\ \text{mm}^4;$$

$$I_y = 2\cdot\left[\frac{(60-12)^3\cdot 12}{12}+(60-12)\cdot 12\cdot(24+6)^2\right]+\left[\frac{12^3\cdot 120}{12}\right]=1{,}275264\cdot 10^6\ \text{mm}^4;$$

$$I_{zy} = 12\cdot(60-12)\cdot(24+6)\cdot(60-6)+12\cdot(60-12)\cdot\left[-(24+6)\right]\cdot\left[-(60-6)\right]=1{,}86624\cdot 10^6\ \text{mm}^4.$$

Momentele de inerţie centrale principale se determină cu relaţiile (3.55):

$$I_{1,2} = \left[\frac{5{,}101056+1{,}275264}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5{,}101056-1{,}275264}{2}\right)^2+(1{,}8662)^2}\right]\cdot 10^6,$$

de unde rezultă:

$I_1 = 5{,}860616\cdot 10^6\text{mm}^4$; $\qquad I_2 = 0{,}515704\cdot 10^6\text{mm}^4$.

Orientarea axelor principale de inerţie se determină cu relaţia (3.54):

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\cdot 1{,}86624\cdot 10^6}{(5{,}101056-1{,}275264)\cdot 10^6} = 0{,}9840588.$$

Rezultă:

$\alpha_0 = 44^o17'$; $134^o17'$.

Deoarece $I_{zy} > 0$ direcția principală I este dată de unghiul $134^o17'$ pentru care $\tan\alpha_0<0$. Direcțiile principale de inerție sunt precizate în figura 3.57.

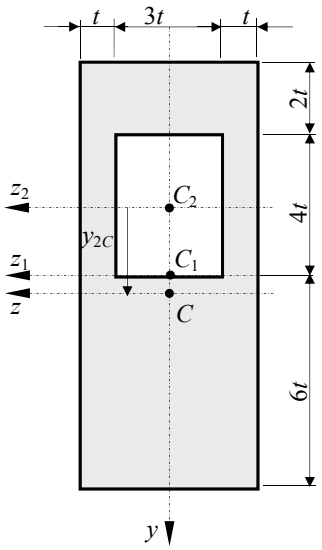


Fig. 3.58.

P.3.37. Să se determine momentele de inerție centrale principale pentru secțiunea din figura 3.58.

Secțiunea fiind simetrică în raport cu axa y centrul de greutate se află pe această axă. Este necesar să se determine numai y_C. Pentru aceasta se consideră secțiunea ca fiind alcătuită din dreptunghiul mare cu centrul în C_1 din care se scade dreptunghiul mic cu centrul în C_2. Rezultă:

$$y_{2C} = \frac{2t \cdot 5t \cdot 12t}{5t \cdot 12t - 3t \cdot 4t} = 2{,}5t$$

Aplicând relațiile (3.48) se obține:

$$I_z = \left[\frac{(12t)^3 \cdot 5t}{12} + 5t \cdot 12t \cdot (2{,}5t - 2t)^2\right] - \left[\frac{(4t)^3 \cdot 3t}{12} + 3t \cdot 4t \cdot (2{,}5t)^2\right] = 644t^4,$$

$$I_y = \frac{(5t)^3 \cdot 12t}{12} - \frac{(3t)^3 \cdot 4t}{12} = 116t^4.$$

Momentul de inerție centrifugal I_{zy} este nul deoarece axele z şi y sunt axe centrale principale de inerție.

P.3.38. Să se determine momentele de inerție față de axele Cy şi Cz pentru secțiunea formată din trei cercuri cu diametru d, dispuse ca în figura 3.59.

Centrul de greutate al secțiunii se află pe axa y, axă de simetrie, la 2/3 de vârful C_1 al triunghiului $C_1C_2C_3$ şi la 1/3 de baza lui.

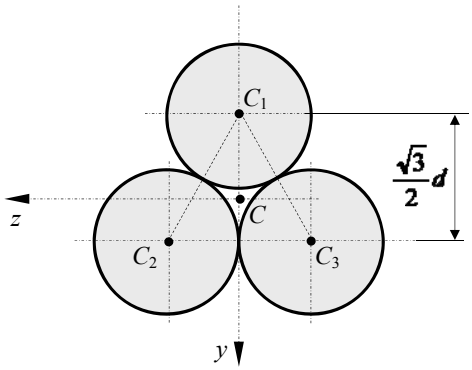


Fig. 3.59.

Cu relațiile (3.48) se obține:

$$I_z = \left[\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}d\right)^2\right] + 2\left[\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}d\right)^2\right] = \frac{11}{64}\pi d^4,$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} + 2\left[\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2\right] = \frac{11}{64}\pi d^4.$$

Egalitatea celor două momente de inerţie axiale se explică prin faptul că cele trei cercuri sunt situate în poziţii identice faţă de trei axe centrale.

Probleme suplimentare

P.3.39. Pentru secţiunea din figura 3.60 să se determine momentele de inerţie centrale principale.

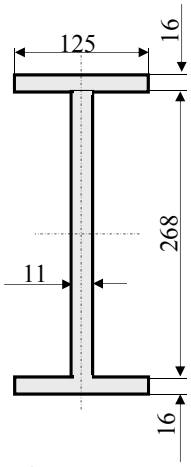


Fig. 3.60.

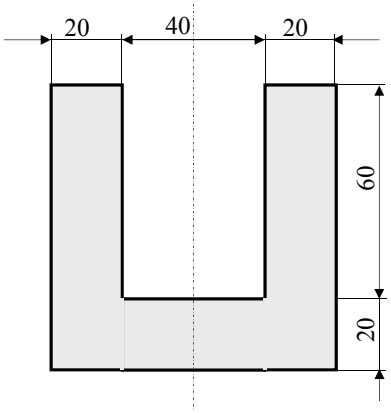


Fig. 3.61.

P.3.40. Pentru secţiunea din figura 3.61 să se determine momentul de inerţie în raport cu o axă orizontală care trece prin centrul de greutate.

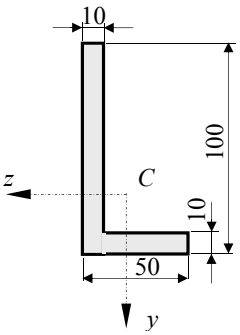


Fig. 3.62.

P.3.41. Pentru profilul cornier L 100 x 50 x 10, din figura 3.62, considerat ca format din dreptunghiuri, să se calculeze:

a) momentele de inerţie în raport cu axele *yCz* ce trec prin centrul de greutate;

b) poziţia axelor principale şi valoarea momentelor principale de inerţie.

3.4. ÎNCOVOIEREA BARELOR DREPTE CU SECŢIUNE CONSTANTĂ

Încovoierea este solicitarea simplă a unei bare drepte sau a unei porțiuni dintr-o bară dreaptă atunci când în toate secțiunile transversale ale acesteia există numai efortul secțional M_y sau M_z.

Deoarece între momentul încovoietor M şi forța tăietoare T există relația de legătură $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T$, (vezi par. 2.2), rezultă că, atunci când momentul încovoietor variază în lungul barei, în secțiunea acesteia există şi forță tăietoare.

a) b)

Fig. 3.63.

Deci, o bară, sau o porțiune dintr-o bară, este solicitată numai la încovoiere, adică la *încovoiere pură*, atunci când momentul încovoietor este constant în lungul barei (fig. 3.63).

În caz contrar, bara este solicitată la încovoiere şi forfecare, solicitare care poartă numele de *încovoiere simplă*.

3.4.1. Încovoierea pură şi dreaptă

În cazul încovoierii pure şi drepte, în toate secțiunile transversale ale barei apare numai un moment care este dirijat după o axă principală de inerție, aşa cum se poate observa în figura 3.64 unde momentul încovoietor M_z este dirijat după axa Oz perpendiculară pe axa Oy care este axă de simetrie a secțiunii şi deci axă principală de inerție.

3.4.1.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Considerând că momentul încovoietor este orientat după axa *Oz* (fig. 3.64) relațiile de echivalență (1.29) sunt:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_{(A)} \sigma_x \mathrm{d}A = 0; & M_x &= \int_{(A)} \left(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y\right) \mathrm{d}A = 0; \\
T_z &= \int_{(A)} \tau_{xy} \mathrm{d}A = 0; & M_y &= -\int_{(A)} \sigma_x \cdot z \mathrm{d}A = 0; \\
T_y &= \int_{(A)} \tau_{xz} \mathrm{d}A = 0; & M_z &= \int_{(A)} \sigma_x \cdot y \mathrm{d}A \neq 0.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

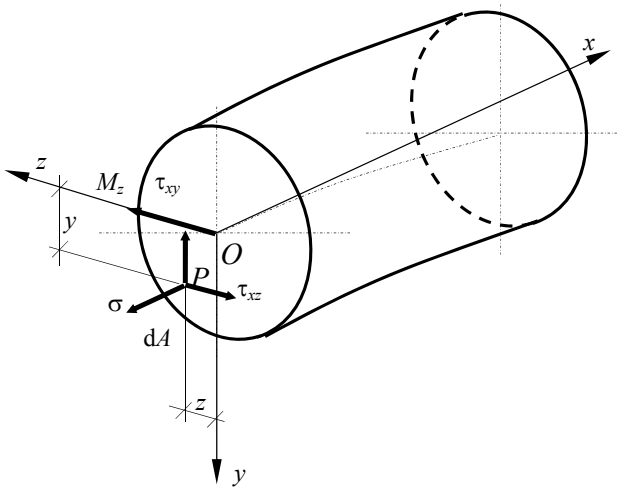


Fig.3.64.

Deoarece distribuția tensiunilor pe secțiune nu se cunoaşte se apelează la aspectul geometric pentru a determina relațiile dintre deformații şi deplasări, în baza ipotezei secțiunilor plane.

Pentru aceasta se vor trasa pe suprafața exterioară a barei nedeformate două curbe directoare ce reprezintă urmele a două secțiuni drepte imaginare prin bară, infinit apropiate şi, între ele, segmente paralele cu axa barei, reprezentând elemente de lungime d*x* din fibrele de la suprafața exterioară a barei (fig. 3.65, *a*).

După solicitarea barei cu momentele *M* la capetele ei (fig. 3.65, *b*) se constată următoarele:

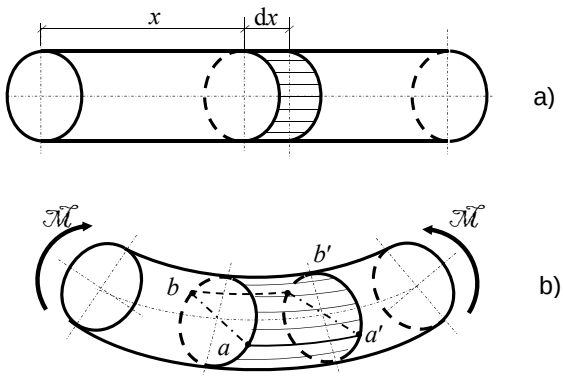


Fig.3.65.

a) Fibrele de lungime d*x* de la exteriorul barei s-au deformat diferit, astfel încât:

– fibrele *a–a′* şi *b–b′* situate de o parte şi de alta a barei rămân nedeformate;

– fibrele situate deasupra dreptelor *ab*, respectiv *a′b′* se scurtează, iar fibrele situate sub acestea se alungesc;

– unghiurile drepte dintre direcţia fibrelor şi tangentele la curbele directoare, rămân drepte şi după deformare.

Din cele prezentate rezultă:

$$\varepsilon_0 = f(y_0, z_0) \neq 0\,;\ \gamma_0 = g(y_0, z_0) = 0\,, \tag{3.59}$$

unde (y_0, z_0) sunt coordonatele unui punct de pe suprafaţa secţiunii drepte, situat pe o curbă directoare (deci la exteriorul barei), faţă de un sistem de axe oarecare al secţiunii.

b) În baza ipotezei lui Bernoulli, cele observate la exteriorul barei se extind asupra fibrelor din interiorul elementului de bară de lungime d*x* (fig. 3.66):

– toate fibrele care au un capăt pe dreapta *ab* şi celălalt capăt pe dreapta *a′b′* rămân nedeformate, lungimea lor fiind aceeaşi şi anume d*x*;

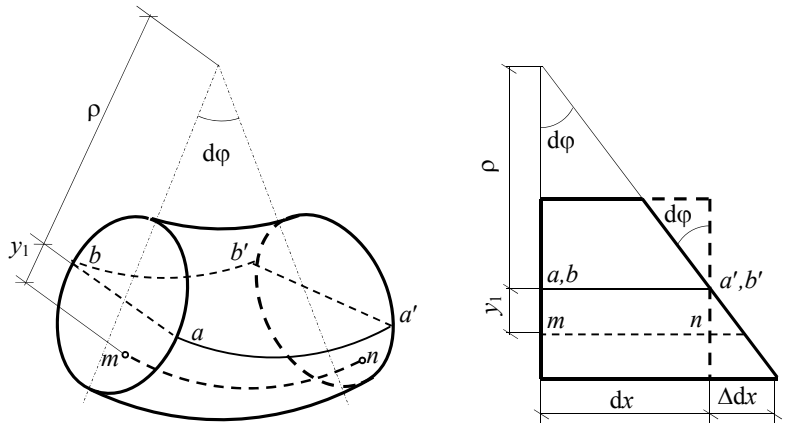
– o fibră *m-n*, situată la depărtarea y_1 de dreapta *ab* se alungeşte proporţional cu această depărtare;

– unghiurile drepte dintre direcţia fibrelor şi planul secţiunii drepte rămân drepte şi după deformare.

Pe baza acestor concluzii, în conformitate cu notaţiile din figura 3.66, se poate scrie:

$$\varepsilon = \frac{\overline{mn'} - \overline{mn}}{\overline{mn}} = \frac{(\mathrm{d}x + \Delta\mathrm{d}x) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = y_1\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = y_1\omega\ \ ;\ \ \gamma = 0\,, \tag{3.60}$$

unde dφ este unghiul cu care se rotesc, una faţă de cealaltă, două secţiuni situate la depărtarea d*x*, în jurul unei axe paralelă cu dreapta *ab*; $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ se numeşte *încovoiere specifică* şi reprezintă unghiul cu care se rotesc, una faţă de cealaltă, două secţiuni situate la o depărtare egală cu unitatea. Pentru toate punctele unei secţiuni ω = const.



a) b)

Fig. 3.66.

Aspectul fizic constă în legea simplă a lui Hooke exprimată de relațiile (3.4), care în cazul de față capătă forma:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\omega\cdot y_1. \;\; ; \;\; \tau = G\cdot\gamma = 0. \tag{3.61}$$

Din a doua relație (3.61) se deduce că $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, ceea ce conduce la concluzia că a doua, a treia şi a patra egalitate din (3.58) se verifică.

Din prima relație (3.61) rezultă că în punctele situate pe dreapta *ab* pentru care $y_1 = 0$, tensiunile normale σ sunt nule.

Dreapta *ab* este numită *axa neutră* a secțiunii şi este definită sub unul din următoarele moduri :

– locul geometric al punctelor de pe secțiune care reprezintă capetele fibrelor care nu se alungesc şi nu se scurtează;

– intersecția planului secțiunii după deformarea barei cu planul secțiunii înainte de deformarea acesteia;

– succesiunea punctelor de pe secțiunea dreaptă a barei în care tensiunile σ sunt nule.

Suprafața *abb′a′*, generată de axele neutre ale diferitelor secțiuni ale barei, reprezintă *suprafața neutră* a acesteia.

Înlocuind expresia lui σ din (3.61) în prima egalitate din (3.58) se obține:

$$N = E\omega \int_{(A)} y_1 \mathrm{d}A = 0 .$$

Integrala $\int\limits_{(A)} y_1 \mathrm{d}A = S_n$ reprezintă momentul static al secţiunii barei în raport cu dreapta *ab*, deci în raport cu axa neutră. Pentru ca $S_n = 0$ trebuie ca axa neutră să treacă prin centrul de greutate al secţiunii.

Înlocuind expresia lui σ din (3.61) în a cincia egalitate din (3.58) se obţine:

$$M_y = -E\omega \int\limits_{(A)} y_1 z \mathrm{d}A = 0 .$$

Integrala $\int\limits_{(A)} y_1 z \mathrm{d}A = I_{ny}$ reprezintă momentul de inerţie centrifugal al secţiunii în raport cu axa neutră şi axa *y*. Pentru ca $I_{ny} = 0$ axa neutră trebuie să fie conjugată cu axa *y* care este axă de simetrie a secţiunii (vezi ipoteza iniţială).

Deoarece axa neutră trebuie să treacă prin centrul de greutate al secţiunii şi în acelaşi timp să fie perpendiculară pe axa *y*, rezultă că ea coincide cu axa *z* şi deci $y_1 = y$.

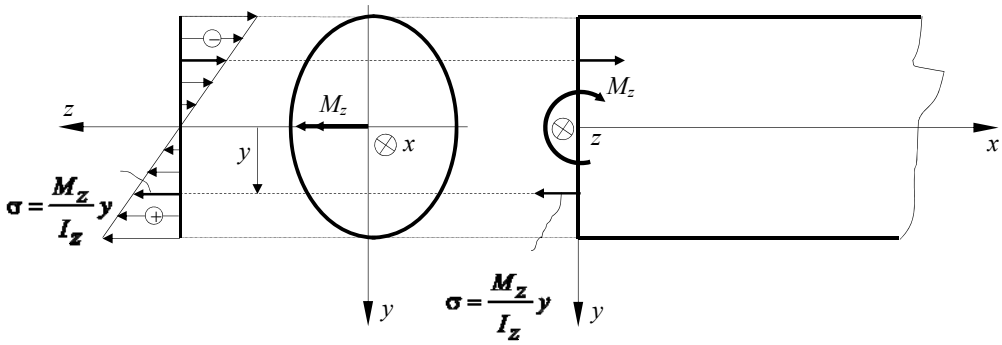


Fig. 3.67.

În această situaţie, înlocuind expresia lui σ din (3.61) în ultima egalitate din (3.58) se obţine:

$$M_z = E\omega \int\limits_{(A)} y_1 y \mathrm{d}A = E\omega \int\limits_{(A)} y^2 \mathrm{d}A = E\omega I_z ,$$

unde I_z reprezintă momentul de inerţie axial al secţiunii în raport cu axa *Oz*.

Ţinând seama de prima relaţie (3.61), rezultă:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \tag{3.62}$$

formulă care defineşte repartiţia tensiunilor σ pe secţiunea unei bare solicitată la încovoiere pură şi care poartă numele de formula lui Navier.

Din (3.62) se deduce că tensiunea σ variază liniar pe secțiune, proporțional cu depărtarea *y* față de axa neutră, care coincide cu axa *z*, fiind nulă în punctele de pe aceasta (fig.3.67).

3.4.1.2. Calculul de rezistenţă

În conformitate cu formula lui Navier (3.62), pentru materialele care se comportă identic la întindere sau compresiune, punctul cel mai solicitat de pe secțiune este punctul cel mai depărtat de axa neutră, axa *z*, unde:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{I_z} \cdot |y_{\max}| = \frac{|M_z|}{W_z}. \tag{3.63}$$

În relația (3.63)

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} \tag{3.64}$$

este *modulul de rezistență la încovoiere* al secțiunii. El reprezintă o caracteristică geometrică a secțiunii şi se măsoară în unități de lungime la puterea a treia (de obicei în mm^3).

Condiția de rezistență pentru întreaga bară se pune în punctul cel mai depărtat de axa *z* în secțiunea în care momentul încovoietor este maxim, adică:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z} \le \sigma_a. \tag{3.65}$$

Relația (3.65) poate fi folosită pentru:

– *dimensionarea* barei atunci când se cunosc solicitarea, deci se cunoaşte valoarea lui $M_z^{\max}$, şi materialul din care aceasta este confecționată, adică rezistența admisibilă σ_a:

$$W_z^{nec} = \frac{|M_z^{\max}|}{\sigma_a} = W_z^{\dim}, \tag{3.66}$$

unde W_z^{nec} reprezintă modulul de rezistență la încovoiere necesar pentru ca bara să reziste la momentul încovoietor $M_z^{\max}$, iar $W_z^{\dim}$ este modulul de rezistență la încovoiere în funcție de dimensiunile secțiunii barei.

– *verificarea* dimensiunilor secţiunii barei atunci când se cunosc solicitarea, forma şi dimensiunile secţiunii barei precum şi rezistenţa admisibilă:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{\left|M_z^{\max}\right|}{W_z^{ef}} \le \sigma_a \tag{3.67}$$

unde W_z^{ef} reprezintă modulul de rezistenţă la încovoiere efectiv al secţiunii barei; verificarea barei se va face după fiecare dimensionare, ca măsură suplimentară de siguranţă în ceea ce priveşte corectitudinea calculelor.

– determinarea *efortului capabil*, adică a momentului de încovoiere maxim $M_z^{\max}$ atunci când se cunosc forma şi dimensiunile secţiunii barei precum şi rezistenţa admisibilă:

$$\left|M_z^{\max}\right| \le M_z^{cap} = \sigma_a W_z^{ef} . \tag{3.68}$$

Dacă momentul încovoietor este dirijat după axa y atunci în formulele (3.63) ÷ (3.68) M_z se înlocuieşte cu M_y, I_z cu I_y, iar $\left|y_{\max}\right|$ cu $\left|z_{\max}\right|$.

3.4.2. Încovoierea simplă şi dreaptă

Atunci când în toate secţiunile barei există pe lângă efortul secţional M_z şi forţa tăietoare T_z bara este supusă la solicitarea de încovoiere simplă şi dreaptă. Încovoierea simplă şi dreaptă este de fapt o solicitare compusă de încovoiere şi forfecare, în care încovoierea este solicitarea predominantă. Acest tip de solicitare se întâlneşte la barele lungi în raport cu dimensiunile secţiunii lor.

3.4.2.1. Distribuţia tensiunilor σ şi τ pe secţiunea dreaptă a barei

Pentru bare la care lungimea l şi înălţimea h îndeplinesc condiţia $\frac{h}{l} \le \frac{1}{4}$ se admite că influenţa forţei tăietoare, cu privire la dezvoltarea deformaţiilor specifice ε este mică şi că poate fi neglijată, ea manifestându-se doar în cazul deformaţiilor specifice unghiulare.

În consecinţă, distribuţia tensiunilor normale σ pe secţiunea dreaptă, dată de formula lui Navier, relaţia (3.62), este valabilă şi în cazul încovoierii simple şi drepte.

Pentru efectuarea calculului de rezistenţă este necesar mai întâi să se studieze

influența forței tăietoare în ceea ce privește punctul cel mai solicitat de pe secțiune, ca și punctul cel mai periculos din cuprinsul întregii bare.

Influența forței tăietoare cu privire la tensiunile tangențiale τ_{xy} și τ_{xz} pe secțiunea dreaptă. Distribuția tensiunilor tangențiale pe secțiunea dreaptă a fost rezolvată de Jurawski pentru cazul barelor ale căror secțiuni sunt simetrice în raport cu axa y (fig. 3.68).

Jurawski a considerat că *în toate punctele barei situate la aceeaşi distanță de axa neutră (axa z) tensiunile tangențiale τ_{xy} sunt egale*.

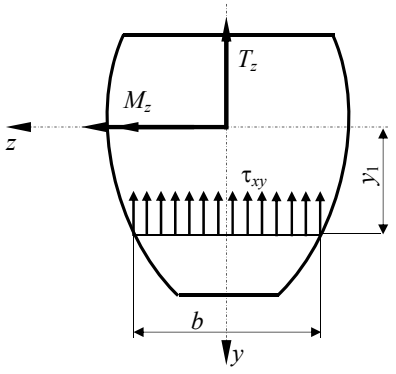


Fig. 3.68.

În aceste condiții, izolând din bară un element de lungime dx (fig. 3.69) şi intersectând acest element cu un plan longitudinal ABB_1A_1, paralel cu axa neutră a secțiunii, se obține elementul de volum $ABCA_1B_1C_1$ pe fețele căruia acționează tensiunile indicate în figura 3.70.

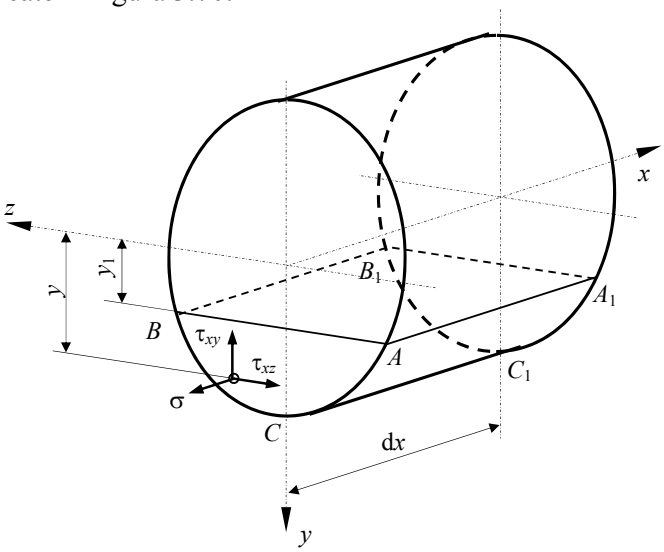


Fig. 3.69.

În baza ipotezei lui Jurawski şi a dualității tensiunilor tangențiale, pe fața longitudinală ABB_1A_1 a elementului tensiunile τ_{xy} (= τ_{yx}) se distribuie uniform dacă se neglijează creşterea acestora $\partial\tau_{xy}$ odată cu creşterea lui x cu ∂x (fig. 3.70).

Sub acțiunea forțelor generate de tensiuni elementul de volum considerat trebuie să fie în echilibru. În consecință, proiectând pe direcția x toate forțele care acționează asupra elementului $ABCA_1B_1C_1$, rezultă:

$$\int_{A_1B_1C_1}\left(\sigma+\frac{\partial\sigma}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x\right)\cdot \mathrm{d}A-\int_{ABC}\sigma\cdot \mathrm{d}A-\tau_{xy}\cdot b\cdot \mathrm{d}x=0\,, \tag{3.69}$$

în care b este lățimea secțiunii la distanța y_1 de axa neutră, adică este lățimea secțiunii în punctul în care se calculează τ_{xy}.

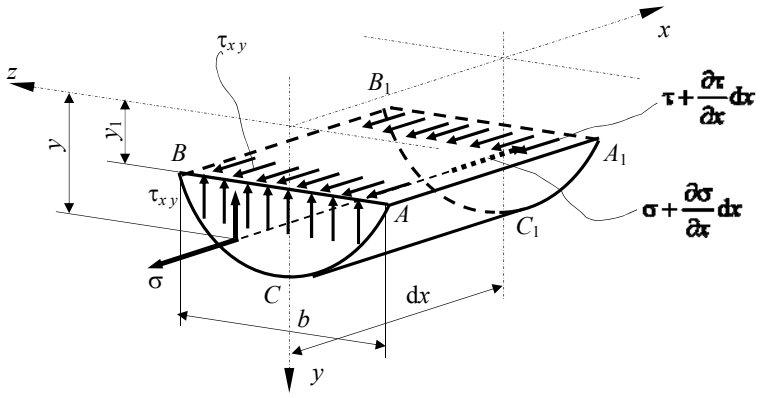


Fig. 3.70.

Deoarece formula lui Navier este valabilă şi în cazul încovoierii simple şi drepte, se poate scrie:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{y}{I_z}=T_z\cdot\frac{y}{I_z}\,. \tag{3.70}$$

În ecuația (3.69) termenii asemenea se pot reduce pentru că suprafețele (ABC) şi ($A_1B_1C_1$) sunt egale, şi se poate simplifica cu dx, deoarece integrarea se face pe suprafețe din secțiunea dreaptă a barei. După introducerea expresiei (3.70) în (3.69) astfel prelucrată se obține:

$$\frac{T_z}{I_z}\int_{ABC} y\cdot \mathrm{d}A-\tau_{xy}\cdot b=0 \tag{3.71}$$

Se observă că:

$$\int_{ABC} y\cdot \mathrm{d}A=S_n^{(ABC)}=S_z \tag{3.72}$$

este momentul static al suprafeței (*ABC*) în raport cu axa neutră (axa *z*). Înlocuind (3.72) în (3.71) rezultă:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T_z \cdot S_z}{b \cdot I_z}, \tag{3.73}$$

care este formula lui Jurawski, în care termenii au următoarele semnificații:

T_z – forța tăietoare din secțiune, variază numai cu *x*;

I_z – momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa *z* (axa neutră);

b – lățimea secțiunii în punctul în care se calculează τ_{xy}; se obține prin ducerea în acel punct a unei drepte paralele la axa neutră;

S_z – momentul static, în raport cu axa neutră (axa *z*), al părții din secțiune care tinde să lunece; se poate considera ca parte din secțiune care tinde să lunece este una din cele două părți ale secțiunii, obținute prin tăierea acesteia cu o dreaptă paralelă cu axa neutră dusă prin punctul în care se calculează τ_{xy}.

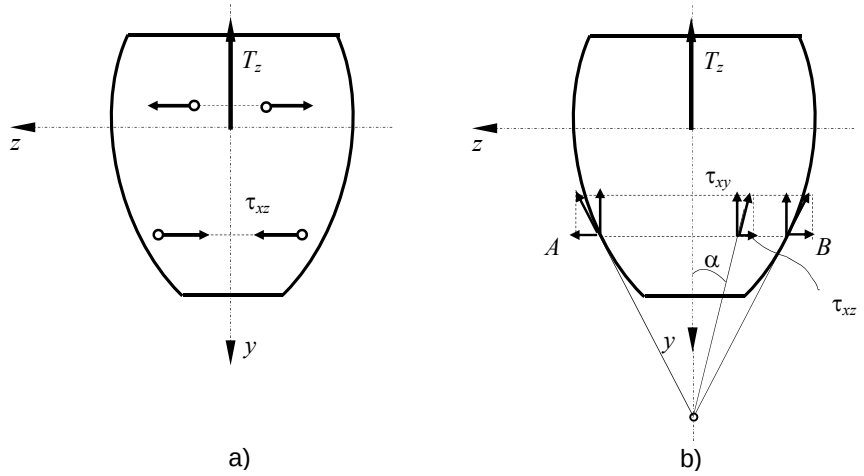


Fig. 3.71

Se face observația că, în secțiunea transversală, τ_{xy} variază în funcție de *b* şi S_z, iar în lungul barei în funcție de T_z.

Deoarece pe secțiune există numai eforturile T_z şi M_z, tensiunile tangențiale τ_{xz} pentru secțiunile simetrice trebuie să se echilibreze deoarece:

$$T_z = \int_A \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A = 0 .$$

Din motive de simetrie, de o parte şi de alta a axei *y*, aceste tensiuni trebuie să fie simetrice (fig. 3.71, *a*)

Deoarece la exteriorul barei nu există tensiuni tangenţiale, nu vor exista nici tensiuni τ normale pe direcţia tangentei la periferia secţiunii drepte. În consecinţă, la periferia secţiunii drepte tensiunile tangenţiale sunt tangente la secţiune. Aşadar, în punctele *A* şi *B* de la periferia secţiunii, situate pe o dreaptă paralelă cu axa neutră, tensiunile τ sunt tangente la periferia secţiunii, direcţiile lor intersectându-se într-un punct de pe axa *y* (fig. 3.71, *b*). Acceptând ipoteza că direcţiile tensiunilor τ în punctele de pe dreapta *AB* sunt concurente în acelaşi punct de pe axa *y* se poate scrie:

$$\tau_{xz} = -\tau_{xy} \cdot \tan\alpha \tag{3.74}$$

Această expresie nu are suport ştiinţific dar nici implicaţii practice supărătoare.

3.4.2.2. Tensiuni pe secţiuni înclinate la bare solicitate la încovoiere simplă

În paragraful 1.5.2. s-a prezentat forma particulară pe care o ia tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ în cazul barelor ca urmare a acceptării ipotezei că acestea sunt alcătuite din fibre longitudinale care nu se apasă şi nu lunecă între ele în direcţie normală pe axa barei.

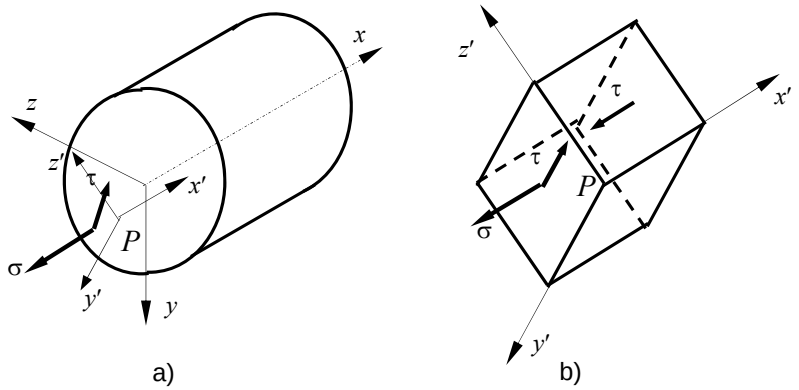


Fig. 3.72.

În consecinţă, dacă dintr-un punct *P* al barei se detaşează o particulă elementară având una din feţe în planul secţiunii şi celelalte două în plane longitudinale (unul paralel cu tensiunea tangenţială τ din planul secţiunii drepte şi celălalt normal pe acesta), tensiunile din planul paralel cu τ din planul secţiunii drepte, sunt nule (fig. 3.72).

Rezultă că în toate planele perpendiculare pe axa z' tensiunile sunt nule. Starea de tensiuni în care tensiunile pe plane paralele cu planul dat sunt nule este o *stare plană de tensiuni*. Deci în orice punct al barei starea de tensiuni este o stare plană.

Pentru evidențierea tensiunilor pe secțiuni înclinate în starea plană de tensiuni se va considera mai întâi o stare plană de tensiuni în care apar σ_x, σ_y şi $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, aşa cum se poate vedea în figura 3.73, urmând ca ulterior, rezultatele obținute să se particularizeze pentru cazul barelor solicitate la încovoiere simplă.

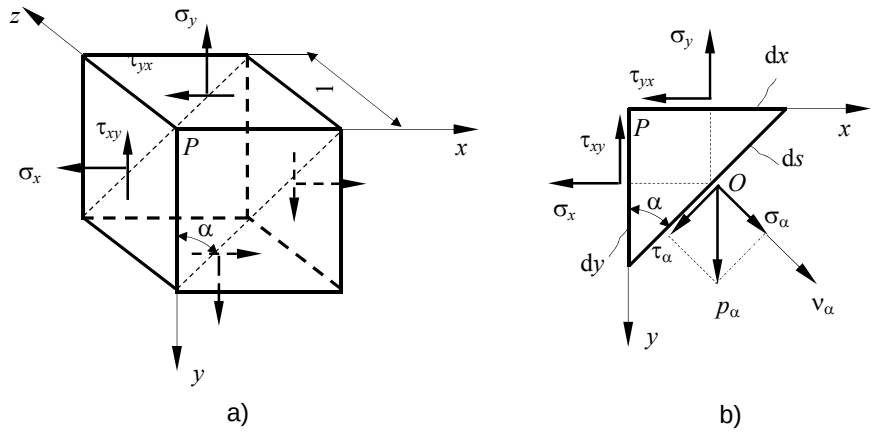


Fig. 3.73.

Problema poate fi enunțată astfel: cunoscând starea de tensiuni plană ce se dezvoltă într-un punct P din interiorul unui corp să se determine tensiunile ce apar într-un plan de normală ν_α ce trece prin punctul P. Aceasta este echivalent cu determinarea tensiunilor σ_α şi τ_α în funcție de tensiunile σ_x, σ_y şi τ_{xy} (fig. 3.73, *b*).

Elementul de volum considerat şi de grosime egală cu unitatea, sub acțiunea forțelor generate de tensiuni este în echilibru. În consecință, se pot scrie trei ecuații de echilibru (sistemul de forțe produse de tensiuni este un sistem de forțe coplanar).

Astfel, din ecuația de moment în raport cu punctul O (fig. 3.73, *b*):

$$(\tau_{xy} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}y) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathrm{d}x\right) - (\tau_{yx} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}x) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathrm{d}y\right) = 0$$

se obține egalitatea:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{3.75}$$

care exprimă legea dualității tensiunilor tangențiale.

Proiectând toate forțele generate de tensiuni pe direcția lui σ_α se obține:

$$\sigma_\alpha \cdot 1 \cdot ds - (\sigma_x \cdot 1 \cdot dy) \cdot \cos\alpha - (\sigma_y \cdot 1 \cdot dx) \cdot \sin\alpha - (\tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy) \cdot \sin\alpha - (\tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx) \cdot \cos\alpha = 0,$$

iar din proiecția pe direcția lui τ_α rezultă:

$$\tau_\alpha \cdot 1 \cdot ds + (\sigma_x \cdot 1 \cdot dy) \cdot \sin\alpha - (\sigma_y \cdot 1 \cdot dx) \cdot \cos\alpha - (\tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy) \cdot \cos\alpha - (\tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx) \cdot \sin\alpha = 0.$$

Dacă se are în vedere că $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, iar între laturile elementului de volum există egalitățile $dx = ds \cdot \sin\alpha$, $dy = ds \cdot \cos\alpha$, din cele două ecuații de proiecții rezultă:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned} \tag{3.76}$$

Din relațiile (3.76) rezultă că tensiunile σ_α şi τ_α sunt funcții de (2α). Prin derivarea în raport cu (2α) a lui σ_α rezultă

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)} = \tau_a\,. \tag{3.77}$$

În consecință, valorile extreme ale tensiunii σ_α, denumite *tensiuni principale*, se vor dezvolta în plane în care τ_α este nul. Aceste plane se numesc *plane principale de tensiune*, iar normalele acestor plane *direcții principale de tensiuni*.

Din condiția $\tau_\alpha = 0$ rezultă:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{3.78}$$

care, pentru $\alpha \in [0,2\pi]$ are două soluții $2\alpha_0$ şi $2\alpha_0 + \pi$. În concluzie există două direcții principale de tensiuni: α_0 şi $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, perpendiculare între ele.

Dacă se introduce (3.78) în expresia lui σ_α după ce aceasta s-a explicitat în funcție de $\tan(2\alpha)$ se obțin tensiunile principale:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,. \tag{3.79}$$

S-a convenit ca întotdeauna $\sigma_1 > \sigma_2$, deci:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \qquad (3.80)$$

Pentru a stabili care din unghiurile α_0 sau $\alpha_0 + \pi/2$ corespunde lui σ_1 se calculează derivata expresiei (3.77) şi se pune condiția de maxim. Se obține:

$$\frac{d^2 \sigma_\alpha}{d(2\alpha)^2} = -\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right] 2\cos^2\alpha \frac{\tan\alpha}{\tau_{xy}} < 0$$

Pentru îndeplinirea acestei condiții trebuie ca

$$\frac{\tan\alpha}{\tau_{xy}} > 0 \qquad (3.81)$$

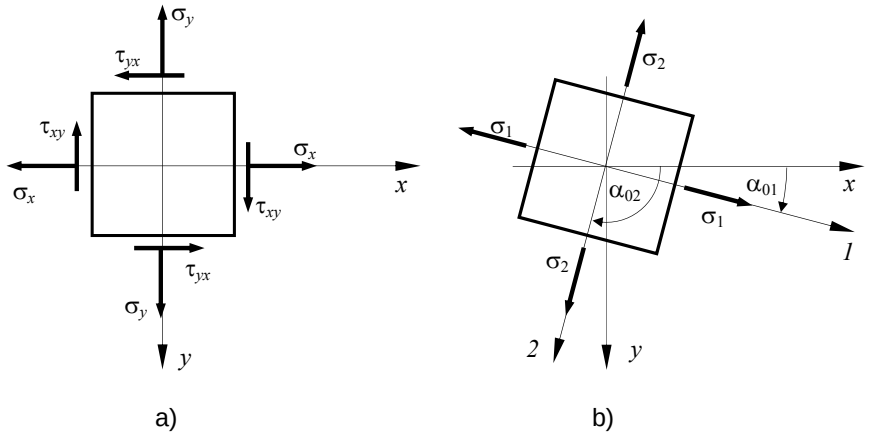


Fig. 3.74.

În consecință, dacă $\tau_{xy} > 0$ direcția lui σ_1, notată cu α_{01}, corespunde unghiului $\alpha_0 < \pi/2$, care are $\tan\alpha_0 > 0$; dacă $\tau_{xy} < 0$, α_{01} corespunde unghiului $\alpha_0 + \pi/2$, care are $\tan\alpha_0 < 0$.

În figura 3.74, pentru elementul ales, s-au trasat planele principale, tensiunile principale şi direcţiile principale de tensiuni.

În cazul în care bara este solicitată la încovoiere simplă se constată că $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, iar într-un punct oarecare de pe secţiunea dreaptă a barei $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau^2$. Rezultă că tensiunile principale, în acest caz sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{aligned} \tag{3.82}$$

Se constată că $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$.

3.4.3. Deformarea barelor drepte solicitate la încovoiere

În baza ipotezei secţiunilor plane configuraţia punctelor care alcătuiesc o bară dreaptă în starea deformată este complet cunoscută, în raport cu un sistem de axe x, y, z, solidar legat de forma nedeformată a barei (axa x fiind direcţia axei barei nedeformate, axele y şi z fiind axele centrale principale de inerţie ale secţiunii), dacă se cunosc deplasările $u(x)$, $v(x)$ şi $w(x)$ ale unui punct curent de pe axa barei şi rotirile $\varphi(x)$, $\psi(x)$ şi $\theta(x)$ ale secţiunii drepte în care s-a considerat punctul

3.4.3.1. Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate

Forma deformată a axei unei bare supuse la încovoiere se numeşte *fibră medie deformată* şi reprezintă o curbă continuă.

Dacă încovoierea este produsă de forţe cuprinse în planul xOy (fig. 3.75, *a*) punctele de pe axa barei au deplasări atât după axa x, $u(x)$, cât şi deplasări transversale, după axa y, $v(x)$. Deoarece $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varepsilon = 0$ este alungirea specifică în axa barei, orice punct C de pe axa barei are numai deplasarea $CC' = v(x)$ (fig. 3.75, *a*).

Considerând că deformaţiile sunt mici în raport cu dimensiunile barei, din figura 3.75, *b* rezultă:

$$\tan\varphi \cong \varphi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{3.83}$$

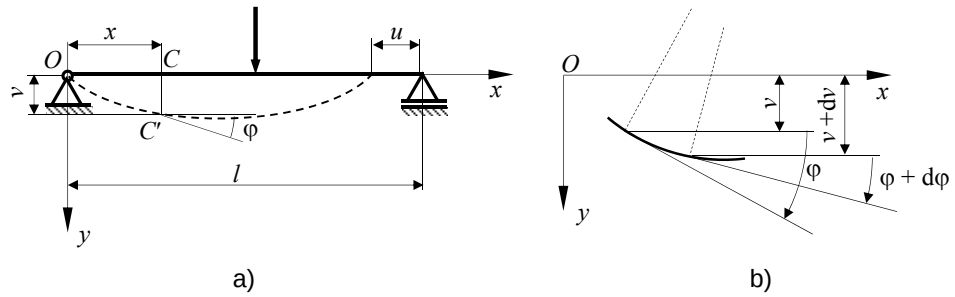


Fig. 3.75.

Prin derivarea expresiei anterioare cu în raport cu x, rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\omega \tag{3.84}$$

deoarece, aşa cum se poate constata din figura 3.76, un moment de încovoiere M_z pozitiv produce o rotire relativă negativă $\mathrm{d}\varphi$ a două secţiuni ale barei situate la depărtarea $\mathrm{d}x$.

Înlocuind în relaţia (3.84) expresia încovoierii specifice $\omega = \dfrac{M_z}{EI_z}$ se obţine:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \tag{3.85}$$

relaţie care reprezintă *ecuaţia diferenţială de ordinul II a fibrei medii deformate*.

Dacă se cunoaşte expresia momentului încovoietor ca funcţie de variabila x, $M_z = M_z(x)$ ecuaţia (3.85) se integrează şi se obţine funcţia $v = v(x, C_1, C_2)$. Constantele de integrare C_1, C_2 se determină din condiţii la limită, care reprezintă valori ale deplasării (săgeţii) v sau rotirii φ în punctele în care bara prezintă legături.

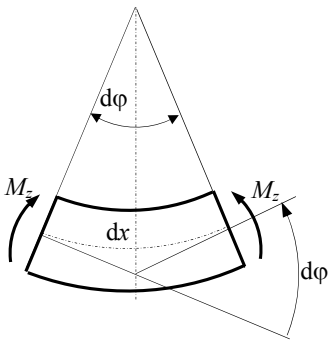


Fig. 3.76.

În cazul în care funcţia $M_z(x)$ nu poate fi exprimată din condiţii de echilibru, cazul sistemelor static nedeterminate, la care numărul forţelor de legătură simple este mai mare decât numărul ecuaţiilor de echilibru ce pot fi scrise, se folosesc relaţiile diferenţiale dintre eforturile

secționale şi solicitări (2.5):

$$\frac{\mathrm{d}T_z}{\mathrm{d}x} = -q_y \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = T_z \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}^2 M_z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}T_z}{\mathrm{d}x} = -q_y \tag{3.86}$$

şi ecuația (3.85) se transformă în:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = \frac{q_y}{EI}, \tag{3.87}$$

care reprezintă *ecuația diferențială de ordinul IV a fibrei medii deformate*.

În cazul în care se cunoaşte intensitatea sarcinii normale ca o funcție de x, $q_y = q_y(x)$, prin integrarea ecuației (3.87) de patru ori se obține funcția $v = v(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$. Pentru determinarea constantelor de integrare se pun condiții în deplasări (săgeți şi rotiri) şi în eforturile secționale M_z şi T_z, întrucât acestea se pot exprima în funcție de v, prin relațiile:

$$M_z = -EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}; \tag{3.88}$$

$$T_z = -EI\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3}. \tag{3.89}$$

Exemple privind integrarea directă a ecuațiilor diferențiale de ordinul IV, respectiv II, a fibrei medii deformate sunt prezentate în cadrul problemelor rezolvate de la sfârşitul acestui capitol.

3.4.3.2. Metode pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale a fibrei medii deformate. Metoda parametrilor în origine

În cele ce urmează se prezintă o metodă de integrare a ecuației diferențiale de ordinul IV a fibrei medii deformate. Pentru aceasta se consideră un tronson de bară $O - A$, cu moment de inerție constant, pe care $q_y = 0$ (fig. 3. 77). În această situație ecuația (3.87) devine:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = 0.$$

Prin integrarea succesivă a acestei ecuații rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = C_1; \ \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = C_1 x + C_2; \ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = C_1\frac{x}{2} + C_2 x + C_3; \ v == C_1\frac{x^2}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

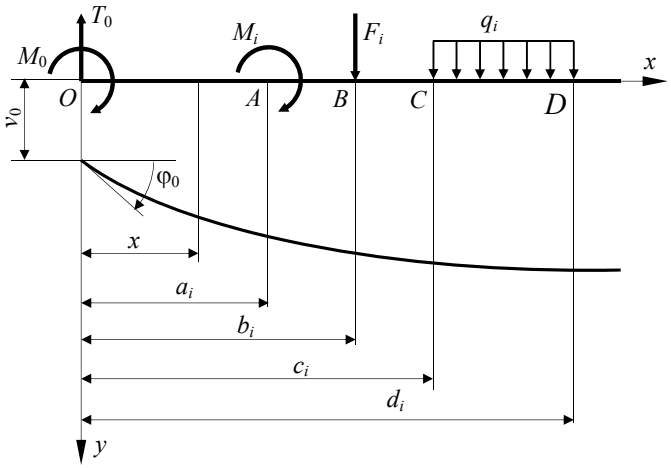


Fig. 3.77.

În secțiunea O, unde $x = 0$ condițiile la limită sunt:

$$v = v_0; \qquad \varphi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \varphi_0$$

$$M_z = -EI_z \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = M_0; \qquad T_z = -EI_z \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = T_0 .$$

Din aceste condiții se obțin constantele de integrare:

$$C_1 = -\frac{T_0}{EI_z}; \;\; C_2 = -\frac{M_0}{EI_z}; \;\; C_3 = \varphi_0; \;\; C_4 = v_0 .$$

care introduse în expresia lui v permit obținerea ecuației fibrei medii deformate pe intervalul $O - A$ în funcție de parametrii în origine:

$$v = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0}{EI_z}\frac{x^2}{2} - \frac{T_0}{EI_z}\frac{x^3}{6} . \tag{3.90}$$

Pentru $x > a_i$ (fig. 3.77) trebuie introdusă soluția particulară corespunzătoare lui M_i, care este soluția (3.90) pentru o bară dreaptă cu originea în A având ca singur parametru $M_0 = M_i$:

$$v(M_i) = -\frac{M_i}{EI_z}\frac{[x-a_i]^2}{2}.$$

Analog, pentru $x > b_i$ trebuie introdusă soluția particulară corespunzătoare lui F_i, care este soluția (3.90) considerând originea în B şi singurul parametru în origine $T_0 = -F_i$:

$$v(F_i) = +\frac{F_i}{EI_z}\frac{[x-b_i]^3}{6}.$$

În cazul unei sarcini uniform distribuite q_i (intervalul $C - D$ din fig. 3.77) soluția particulară are forma:

$$v(q_i) = \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-c_i]^4}{24} - \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-d_i]^4}{24}.$$

Însumând soluția omogenă (3.90) cu soluțiile particulare se obține ecuația fibrei medii deformate pentru o bară dreaptă cu diferite încărcări M_i, F_i, q_i:

$$\begin{aligned} v = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0}{EI_z}\frac{x^2}{2} - \frac{T_0}{EI_z}\frac{x^3}{6} - \sum_i \frac{M_i}{EI_z}\frac{[x-a_i]^2}{2} + \\ + \sum_i \frac{F_i}{EI_z}\frac{[x-b_i]^3}{6} + \sum_i \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-c_i]^4}{24} - \sum_i \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-d_i]^4}{24} \end{aligned} \tag{3.91}$$

Pentru o secțiune oarecare a barei din soluția generală (3.91) se rețin numai termenii ale căror paranteze $x - a_i$, $x - b_i$, $x - c_i$ şi $x - d_i$ sunt pozitive.

Se face observația că, în ecuația fibrei medii deformate (3.91) intervin numai patru constante de integrare, indiferent de numărul intervalelor de variație continuă a încărcărilor. La sistemele static determinate, la care M_0 şi T_0 sunt cunoscute, nu rămân doar două constante de integrare, v_0 şi φ_0, care se determină pe baza condițiilor de rezemare a barei.

Derivând în raport cu x relația (3.91) se obține expresia generală a rotirilor:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 - \frac{M_0}{EI_z}x - \frac{T_0}{EI_z}\frac{x^2}{2} - \sum_i \frac{M_i}{EI_z}[x-a_i] + \\ + \sum_i \frac{F_i}{EI_z}\frac{[x-b_i]^2}{3} + \sum_i \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-b_i]^3}{6} - \sum_i \frac{q_i}{EI_z}\frac{[x-d_i]^3}{6} \end{aligned} \tag{3.92}$$

Şi în acest caz, pentru o secțiune curentă a barei, se rețin numai termenii ale căror paranteze sunt pozitive.

Această metodă de integrare a ecuației diferențiale de ordinul IV este mai avantajoasă decât integrarea directă care introduce câte patru constante pentru fiecare interval de variație continuă a încărcării.

Probleme rezolvate

P.3.42. O consolă este solicitată la capătul liber de un cuplu concentrat $\mathcal{M}$ = 24 kNm. Bara este din oțel cu rezistența admisibilă σ_a = 150 N/mm^2 şi are secțiunea dreptunghiulară b x h cu $h = 2b$ (fig. 3.78). Să se dimensioneze secțiunea barei.

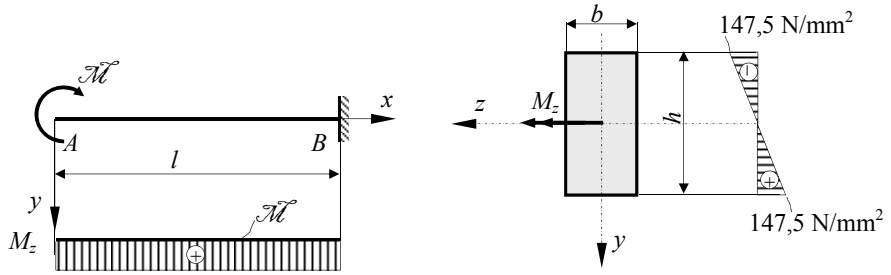


Fig. 3.78.

Bara este solicitată la încovoiere pură deoarece în toate secțiunile ei se dezvoltă numai momentul de încovoiere $M_z = \mathcal{M}$ după cum se poate observa din diagrama M_z din figura 3.78. În consecință în toate secțiunile barei vor exista numai tensiuni normale σ a căror intensitate se determină cu formula lui Navier (3.62).

Dimensionarea secțiunii barei se face cu relația (3.66):

$$W_z^{nec} = \frac{M_z^{\max}}{\sigma_a} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{24 \cdot 10^6}{150} = 160 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Pentru o secțiune dreptunghiulară $W_z^{\dim} = \dfrac{bh^2}{6}$ şi, deoarece $h = 2b$, din egalitatea $W_z^{nec} = W_z^{\dim}$ rezultă;

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (160 \cdot 10^3)}{2}} = 62{,}14 \text{ mm}.$$

Dacă se adoptă b = 62,5 mm rezultă h = 2·62,5 = 125 mm.

Verificarea calculelor se face cu relația (3.67):

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{24 \cdot 10^6}{\frac{62{,}5 \cdot 125^2}{6}} = 147{,}5 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a .$$

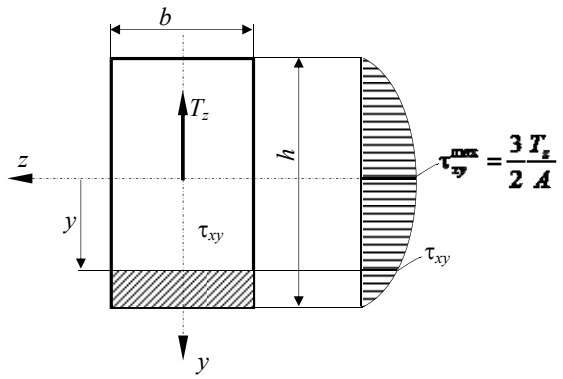


Fig. 3.79.

Distribuția tensiunilor σ este redată în figura 3.78.

P.3.43. Să se stabilească distribuția tensiunilor tangențiale τ_{xy} pe o secțiune dreptunghiulară din cadrul unei bare solicitată la încovoiere simplă.

Se consideră că într-o secțiune curentă a barei pe lângă momentul încovoietor M_z există şi forța tăietoare T_z (fig. 3.79).

În punctele situate la depărtare y de axa z tensiunea τ_{xy}, dată de formula lui Jurawski (3.73), este:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z S_z}{b I_z},$$

unde, conform cu figura 3.79, S_z este momentul static al părții din secțiune care tinde să lunece, (aria haşurată):

$$S_z = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Având în vedere că $I_z = \frac{bh^3}{12}$, rezultă:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{6T_z}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Pentru $y = \pm\frac{h}{2}$ se obține $\tau_{xy} = 0$. Tensiunea maximă $\tau_{xy}^{\max}$ se dezvoltă în punctele de pe axa neutră (axa z) pentru care $y = 0$, şi are valoarea:

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{bh} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A}.$$

După cum se poate observa τ_{xy} are o variație parabolică pe înălțimea secțiunii. În figura 3.79 este redată distribuția acestor tensiuni, ordonatele respective fiind obținute prin rabaterea cu 90° a valorilor τ_{xy} care au direcția şi sensul lui T_z.

P.3.44. Să se stabilească distribuția tensiunilor tangențiale τ_{xy} pe o secțiune circulară din cadrul unei bare solicitată la încovoiere simplă.

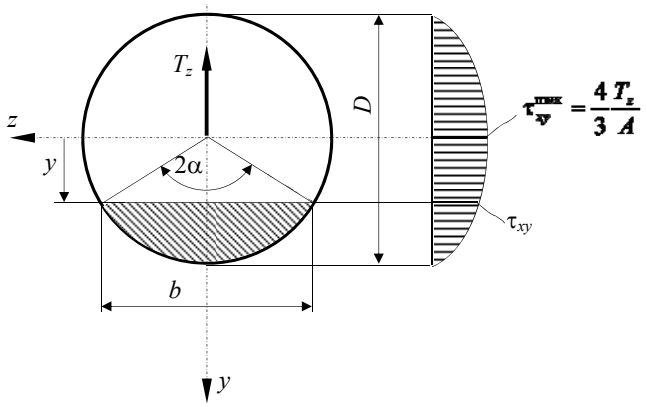


Fig. 3.80.

Considerând unghiul la centru 2α corespunzător lățimii b a secțiunii la depărtarea y de axa z, momentul static al zonei haşurate (partea din secțiune care tinde să lunece) este (fig. 3.80):

$$S_z = A \cdot y_C = \left[\alpha\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{D}{2}\cos\alpha\right)\right] \times$$

$$\times \frac{\alpha\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\frac{D}{2}\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}\left(2\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{D}{2}\cos\alpha\right) \cdot \frac{2}{3}\frac{D}{2}\cos\alpha}{\alpha\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2\frac{D}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{D}{2}\cos\alpha\right)} = \frac{D^3}{12}\sin^3\alpha$$

Înlocuind valoarea lui S_z în relația (3.73) şi având în vedere că $b = 2\frac{D}{2}\sin\alpha = D\sin\alpha$, iar momentul de inerție $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$ rezultă:

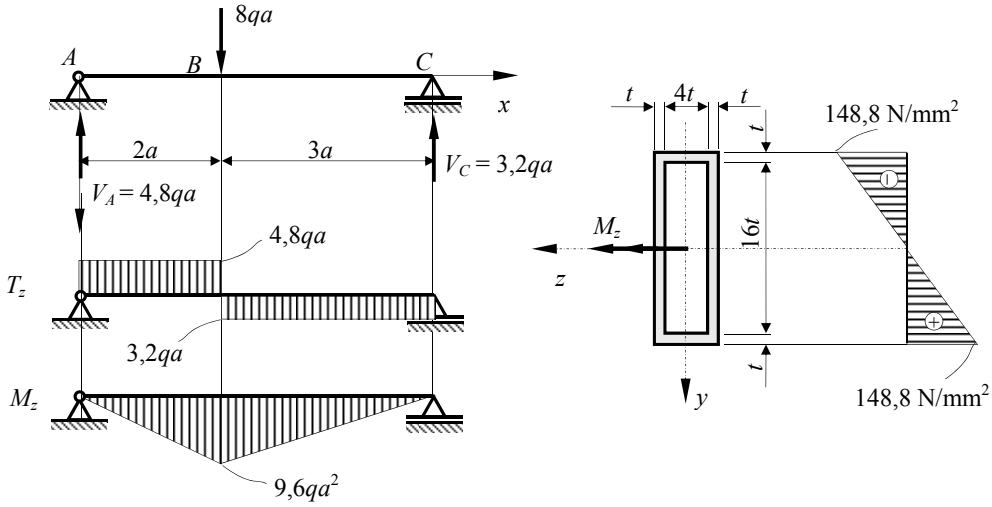
$$\tau_{xy} = \frac{3}{4}\frac{T_z}{A}\sin^2\alpha ,$$

în care A este aria secțiunii circulare de diametru D.

Se constată, şi în acest caz, că τ_{xy} are o variație parabolică pe înălțimea secțiunii, în punctele de pe axa neutră (axa z) pentru care $y = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^o$ valoarea ei fiind maximă (fig. 3.80):

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{4}{3}\frac{T_z}{A} .$$

P.3.45. Bara simplu rezemată din figura 3.81, a acționată de forța concentrată $8qa$, are secțiunea casetată. Rezistența admisibilă la încovoiere a oțelului din care este confecționată bara este $\sigma_a = 150$ N/mm^2. Ştiind că $a = 1$m şi $q = 12$ kN/m să se dimensioneze secțiunea barei.



a) b)

Fig. 3.81.

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 3.86, a. Se constată ca bara este solicitată la încovoiere simplă (în planul secțiunii drepte a barei se dezvoltă eforturile secționale T_z şi M_z). Secțiunea periculoasă este în B unde momentul încovoietor are valoarea maximă $M_z^{\max} = 9{,}6qa^2 = 9{,}6\cdot(12)\cdot(1000)^2 = 115{,}2\cdot 10^6$ Nmm.

Dimensionarea secțiunii barei se face cu relația (3.66). Pentru aceasta se calculează mai întâi modulul de rezistență necesar:

$$W_z^{nec} = \frac{\left|M_z^{\max}\right|}{\sigma_a} = \frac{115{,}2 \cdot 10^6}{150} = 768 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Modulul de rezistență al secțiunii barei în funcție de forma şi dimensiunile acesteia (fig. 3.81, *b*) este:

$$W_z^{\dim} = \frac{I_z}{\left|y_{\max}\right|} = \frac{\dfrac{(18t)^3(6t)}{12} - \dfrac{(16t)^3(4t)}{12}}{9t} = 172{,}3t^3 .$$

Din egalitatea $W_z^{\dim} = W_z^{nec}$ se determină valoarea lui *t*:

$$t = \sqrt[3]{\frac{768 \cdot 10^3}{172{,}3}} = 16{,}45 \text{ mm}$$

Se adoptă t = 16,5 mm şi se verifică corectitudinea calculelor cu relația (3.67):

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{\left|M_z^{\max}\right|}{W_z^{ef}} = \frac{115{,}2 \cdot 10^6}{172{,}3 \cdot (16{,}5)^3} = 148{,}8 \text{ N/mm}^2.$$

Distribuția tensiunilor σ în secțiunea periculoasă (secțiunea *B*) este redată în figura 3.81, *b*.

P.3.46. O bară simplu rezemată este acționată de un cuplu concentrat $9qa^2$, după cum se poate vedea în figura 3.82, şi are secțiunea în formă de U cu dimensiunile precizate în figura 3.83, *a*. Cunoscând că a = 0,2 m şi q = 7 kN/m să se determine tensiunile maxime de întindere şi compresiune care se dezvoltă în bară.

Pentru trasarea diagramei momentului încovoietor se determină mai întâi forțele de legătură din *A* şi *C*. V_A şi V_C trebuie să formeze un cuplu care să rotească în sens invers decât cuplul concentrat şi trebuie să aibă mărimea egală cu:

$$V_A = V_C = \frac{9qa^2}{9a} = qa$$

Diagrama M_z este prezentată în figura 3.82 şi prezintă un salt în dreptul cuplului concentrat.

Bara fiind solicitată la încovoiere distribuția tensiunilor σ pe secțiune este dată de formula lui Navier (3.62). Rezultă că $\sigma_{\max}$ pe secțiune se va dezvolta în punctul cu $y_{\max}$, cel mai depărtat de axa *z*.

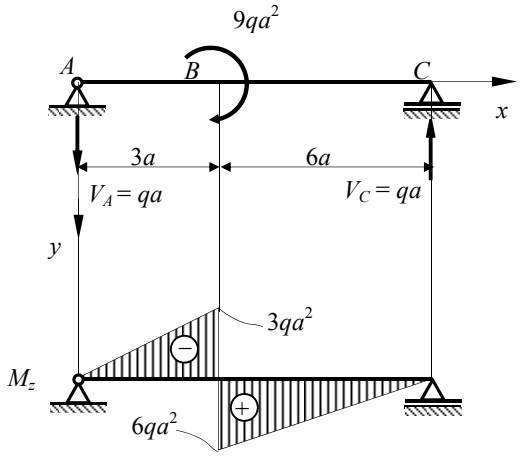


Fig. 3.82.

Deoarece secțiunea nu este simetrică în raport cu axa *z* trebuie mai întâi determinată poziția centrului de greutate. Considerând că

secțiunea se obține scăzând din dreptunghiul mare pe cel mic, distanța de la marginea superioară la centrul de greutate, adică y_C este:

$$y_C = \frac{(50 \cdot 120)(25) - (40 \cdot 100)(20)}{(50 \cdot 120) - (40 \cdot 100)} = 35 \text{ mm}$$

Se poate calcula acum momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa z:

$$I_z = \left[\frac{50^3 \cdot 120}{12} + 50 \cdot 120 \cdot (35-25)^2\right] - \left[\frac{40^3 \cdot 100}{12} + 40 \cdot 100 \cdot (35-20)^2\right] = 416{,}67 \text{ mm}^4.$$

Dacă se consideră secțiunea din stânga lui B, cea în care $M_z = -3qa^2$, distribuția tensiunilor σ este redată în figura 3.83, *a*. În acest caz în toate punctele secțiunii situate deasupra axei z tensiunile σ sunt pozitive, iar în cele situate sub, axa z sunt negative. În consecință:

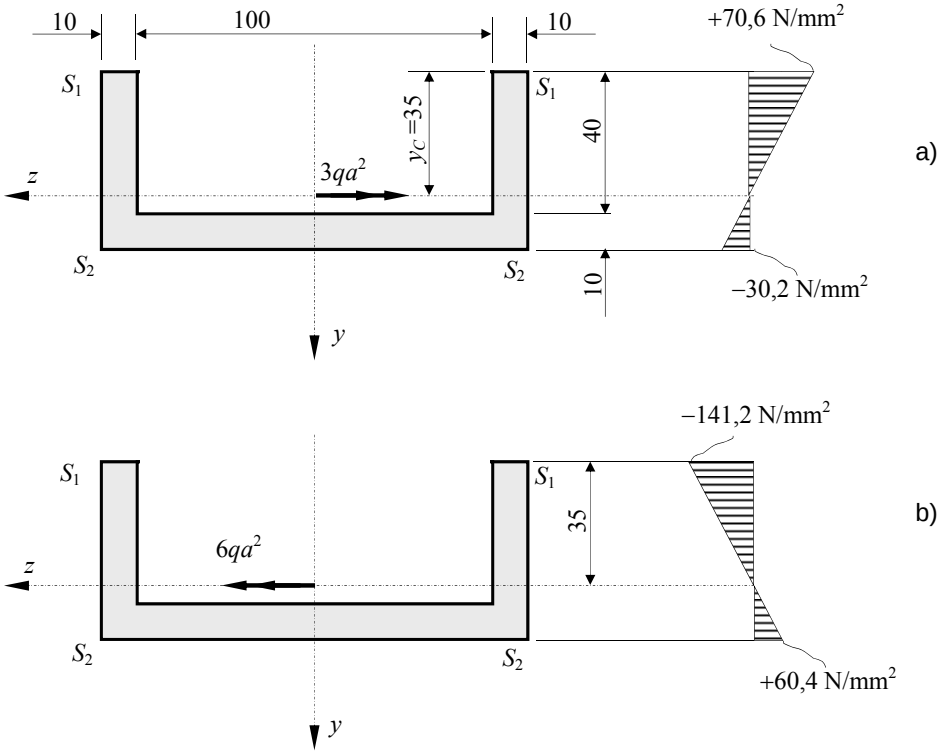


Fig. 3.83.

$$\sigma_{S1} = \frac{-3qa^2}{I_z} \cdot y_{S1} = \frac{-3 \cdot (7) \cdot (200)^2}{416{,}67} \cdot (-35) = +70{,}6 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S2} = \frac{-3qa^2}{I_z} \cdot y_{S2} = \frac{-3 \cdot (7) \cdot (200)^2}{416{,}67} \cdot (15) = -30{,}2 \text{ N/mm}^2.$$

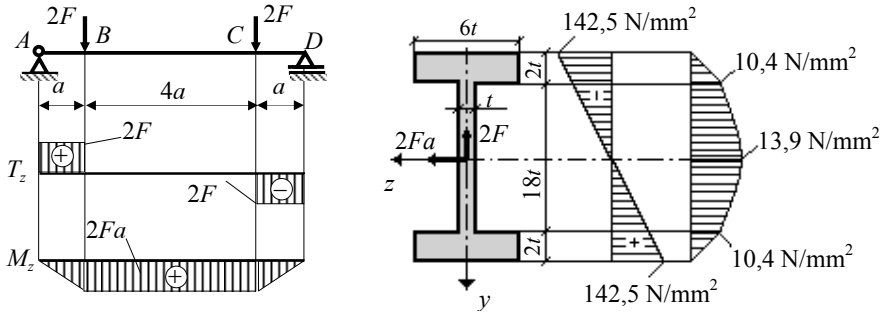
Dacă se consideră secțiunea din dreapta lui B, cea în care $M_z = +6qa^2$, distribuția tensiunilor σ este redată în figura 3.83, *b*. În acest caz în toate punctele secțiunii situate deasupra axei z tensiunile σ sunt negative, iar în cele situate sub axa z sunt pozitive. În consecință:

$$\sigma_{S1} = \frac{6qa^2}{I_z} \cdot y_{S1} = \frac{6 \cdot (7) \cdot (200)^2}{416{,}67} \cdot (-35) = -141{,}2 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S1} = \frac{6qa^2}{I_z} \cdot y_{S1} = \frac{6 \cdot (7) \cdot (200)^2}{416{,}67} \cdot (15) = +60{,}4 \text{ N/mm}^2;$$

Deci tensiunea maximă de întindere este $\sigma^{+}_{\max} = 70{,}6$ N/mm^2 şi se dezvoltă în punctele S_1 din secţiunea B stânga, iar tensiunea maximă de compresiune este $\sigma^{+}_{\max} = 141{,}2$ N/mm^2 şi se dezvoltă în punctele S_1 din secţiunea B dreapta.

P.3.47. Să se dimensioneze bara din figura 3.84, *a*, cu secţiunea în formă de I, dacă $F = 2$kN şi $a = 0{,}6$m, ştiind că rezistenţa admisibilă a materialului din care este confecţionată este $\sigma_a = 150$ N/mm^2. Să se traseze distribuţia tensiunilor σ şi τ_{xy} în secţiunea B stânga şi să se determine tensiunile principale maxime în această secţiune.



a) b)

Fig. 3.84.

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 3.84, *a*. Se constată că bara este solicitată la încovoiere simplă deoarece în secţiunea transversală a sa se dezvoltă eforturile secţionale T_z şi M_z. Dimensionarea se face cu relaţia (3.66), calculându-se mai întâi modulul de rezistenţă necesar:

$$W_z^{\dim} = \frac{M_z^{\max}}{\sigma_a} = \frac{2Fa}{\sigma_a} = \frac{2\cdot(2\cdot 10^3)\cdot(10^3)}{150} = \frac{2{,}4\cdot 10^6}{150} = 16000 \text{ mm}^3.$$

Modulul de rezistenţă al secţiunii barei în funcţie de forma şi dimensiunile acesteia (vezi fig. 3.84, *b*) este:

$$W_z^{\dim} = \frac{I_z}{|y_{mx}|} = \frac{2\cdot\left[\frac{(2t)^3\cdot 6t}{12} + 2t\cdot 6t\cdot(10t)^2\right] + \frac{(18t)^3\cdot t}{12}}{11t} = \frac{2894t^4}{11t} = 263{,}09t^3 .$$

Punând condiţia ca $W_z^{\dim} = W_z^{nec}$ se determină valoarea lui t:

$$t = \sqrt[3]{\frac{16000}{263{,}09}} = 3{,}93 \text{ mm}.$$

Se adoptă $t = 4$ mm şi se verifică corectitudinea calculelor cu relaţia (3.67):

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{2{,}4\cdot 10^6}{263{,}09\cdot 4^3} = 142{,}5 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2.$$

Având în vedere că în secțiunea B stânga momentul încovoietor are valoarea maximă distribuția tensiunilor σ este redată în figura 3.84, *b*.

Pentru distribuția tensiunilor τ_{xy} se constată că în secțiunea B stânga $T_z = 2F = 4\cdot 10^3$ N. În consecință T_z este în sens invers axei y, tensiunile τ_{xy} fiind pozitive şi în acelaşi sens cu T_z (vezi fig. 3.84, *b*). Calculul tensiunilor τ_{xy} se face cu formula lui Jurawski (3.73).

Astfel, în punctul de pe secțiune situat la racordarea inimii cu talpa superioară, respectiv inferioară, tensiunea τ_{xy} are valoarea:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot S_z}{b \cdot I_z} = \frac{(4\cdot 10^3)(120\cdot 4^3)}{(4)(2894\cdot 4^4)} = 10{,}4 \text{ N/mm}^2,$$

deoarece momentul static al porțiunii din secțiune care tinde să lunece S_z este momentul static al tălpii superioare (sau inferioare) $S_z = 6t\cdot 2t\cdot 10t = 120\cdot t^3$.

Se consideră că pe înălțimea tălpilor tensiunile τ_{xy} au o variație liniară, de la valoarea zero în punctele de la exteriorul secțiunii, la valoarea 10,4 N/mm^2 în punctele de racordare talpă-inimă, aşa cum se poate vedea în figura 3.84, *b*. Pe înălțimea inimii, variația tensiunilor tangențiale τ_{xy} este dată tot de relația (3.73) şi în consecință ea este parabolică, valoarea maximă $\tau_{xy}^{\max}$ fiind atinsă în punctele secțiunii situate pe axa z. Pentru secțiunea considerată:

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{T_z \cdot S_z^{\max}}{b \cdot I_z} = \frac{(4\cdot 10^3)(160{,}5\cdot 4^3)}{(4)(2894\cdot 4^4)} = 13{,}9 \text{ N/mm}^2,$$

deoarece $S_z^{\max} = 6t\cdot 2t\cdot 10t + 9t\cdot t\cdot 4{,}5t = 160{,}5t^3$ reprezintă momentul static al unei jumătăți de secțiune. Se face precizarea că distribuția tensiunilor tangențiale τ_{xy} redată în figura 3.84, *b*, a fost obținută folosind în formula (3.73) aceeaşi grosime $b = t = 4$ mm a secțiunii atât în punctele situate pe tălpi, cât şi în punctele situate pe inimă.

În conformitate cu relația (3.82) tensiunile principale pe secțiunea unei bare solicitate la încovoiere simplă apar în punctele în care tensiunile σ şi τ au valori maxime. Astfel, în punctele situate la exteriorul secțiunii, pe talpa inferioară, respectiv superioară unde tensiunile τ sunt nule, tensiunile principale au valorile: $\sigma_1 = 142{,}5$ N/mm^2; $\sigma_2 = -\,142{,}5$ N/mm^2. În punctele de racordare a tălpii cu inima tensiunile normale σ au valoarea: $\sigma = \pm 142{,}5\cdot\frac{18t}{20t} = 128{,}25$ N/mm^2 şi, în consecință tensiunile principale sunt:

$$\sigma_1 = \frac{128{,}25}{2} + \sqrt{\left(\frac{128{,}25}{2}\right)^2 + (10{,}4)^2} = 129{,}1 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{128{,}25}{2} - \sqrt{\left(\frac{128{,}25}{2}\right)^2 + (10{,}4)^2} = -0{,}84 \text{ N/mm}^2.$$

Rezultă că tensiunile principale maxime se dezvoltă în punctele situate la exteriorul secțiunii pe talpa inferioară, respectiv superioară, acolo unde σ este maxim şi τ este nul. În concluzie, în cazul încovoierii simple, condiția de rezistență (3.65) este acoperitoare, chiar dacă ea nu ia în considerare influența forței tăietoare prin intermediul tensiunilor tangențiale τ, deoarece:

$\sigma_1 = |\sigma_{max}| = 142{,}5\ \text{N/mm}^2.$

P.3.48. Pentru bara din figura 3.85, solicitată de momentul $\mathcal{M}$, să se determine ecuația fibrei medii deformate, săgeata şi rotirea secțiunii A.

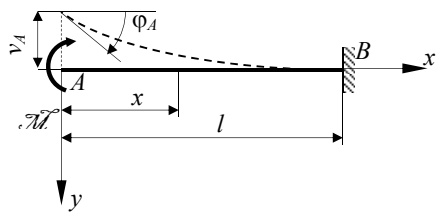


Fig. 3.85.

Într-o secțiune oarecare x a barei momentul încovoietor are valoarea $M_z = \mathcal{M}$. În acest caz ecuația diferențială de ordinul doi a fibrei medii deformate (3.85) capătă forma:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{\mathcal{M}}{EI_z}.$$

După integrare se obține:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot x + C_1;$$
$$v = -\frac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Punând condițiile la limită: $x = l \rightarrow \begin{cases} \varphi_B = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$ se obține sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot l + C_1 \\ 0 = -\dfrac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot \dfrac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 \end{cases}$$

După rezolvarea sistemului rezultă:

$$C_1 = \frac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot l; \qquad C_2 = \frac{\mathcal{M}}{EI_z} \cdot \frac{l^2}{2}.$$

În consecință, ecuația fibrei medii deformate este:

$$v = -\frac{\mathcal{M}}{EI_z}\left(\frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2}\right),$$

iar rotirile se determină cu relația:

$$\varphi = -\frac{\mathsf{M}}{EI_z}(x-l).$$

Folosind ecuaţia fibrei medii deformate se poate determina săgeata în orice secţiune a barei . În secţiunea A săgeata are valoarea:

$$v\big|_{x=0} = v_A = -\frac{\mathsf{M}}{EI_z}\cdot\frac{l^2}{2}$$

şi deci secţiunea se deplasează în sensul invers al axei y aşa cum se poate observa din figura 3.85.

Analog, folosind expresia rotirilor, se determină rotirea secţiunii A:

$$\varphi\big|_{x=0} = \varphi_A = \frac{\mathsf{M}}{EI_z}\cdot\frac{l}{2}.$$

P.3.49. Consola AB din figura 3.86, a este încastrată în punctul A şi este tangentă la un cilindru rigid de rază r. Să se determine săgeata punctului B atunci când bara este solicitată de forţa P.

Datorită solicitării barei cu forţa P aceasta se va deforma astfel încât o porţiune din ea AC va rămâne în contact cu cilindrul rigid, punctul C ajungând în C' (fig. 3.86, a). O secţiune curentă a

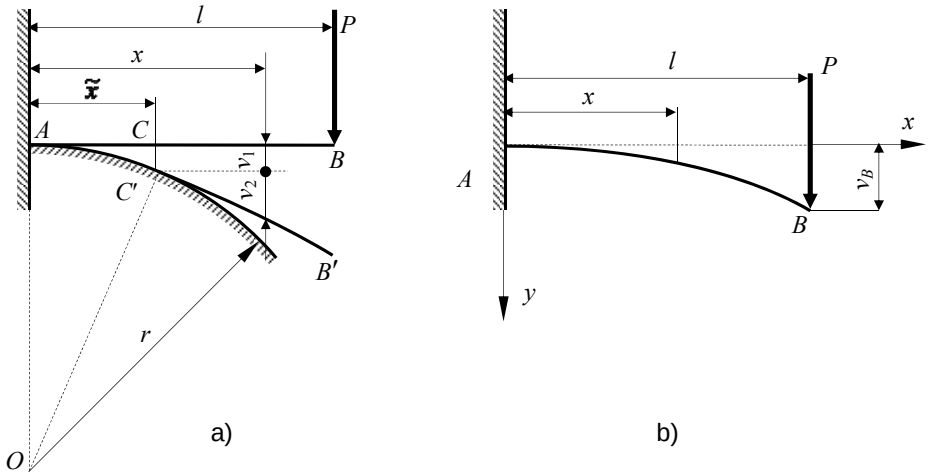


Fig. 3.86.

barei la depărtarea $x > \tilde{x}$ (fig. 3.86, a), pe lângă săgeata v_1 (corespunzătoare punctului C'), va avea o săgeata v_2 datorită rotirii secţiunii C şi o săgeata v_3 produsă de forţa P, dar pe o consolă încastrată de lungime $l - x$. Rezultă că săgeata unei secţiuni oarecare x a barei este:

$$v = v_1 + v_2 + v_3.$$

Pentru determinarea săgeţii punctului C se precizează că între curbura fibrei medii deformate şi săgeată există relaţia:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

În această expresie dv/dx reprezintă panta, în orice punct, la curba fibrei medii deformate; în cazul micilor deformații ale barelor, această cantitate şi cu atât mai mult pătratul ei sunt mici în comparație cu unitatea şi se neglijează. Având în vedere această simplificare şi ținând seama de ecuația diferențială de ordinul doi a fibrei medii deformate, (3.85), se obține legătura dintre curbura fibrei medii deformate şi momentul de încovoiere:

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{M_z}{EI_x}.$$

În secțiunea C momentul încovoietor este $M_z = P(l-\tilde{x})$, iar $\rho = r$ şi deci:

$$\frac{1}{r}=\frac{P(l-\tilde{x})}{EI_z}\Rightarrow \tilde{x}=l-\frac{EI_z}{P\cdot r}$$

În conformitate cu fig. 3.86, *a*, se poate scrie:

$$(r-v_1)^2+\tilde{x}^2=r^2$$

din care, prin neglijarea termenului v_1^2 se obține: $v_1=\dfrac{\tilde{x}^2}{2r}$.

Deplasarea v_2 se datorează rotirii secțiunii C. Având în vedere că unghiul AOC' este egal cu unghiul pe care axa deformată a barei îl face cu orizontala în C' se poate scrie (fig. 3.86, *a*):

$$\frac{v_2}{x-\tilde{x}}=\frac{\tilde{x}}{r}\Rightarrow v_2=\frac{\tilde{x}}{r}(x-\tilde{x}).$$

Pentru calculul lui v_3 să considerăm că deformațiile barei sub solicitarea forței P nu sunt împiedicate, adică bara se poate deforma liber ca şi când cilindrul de rază r nu ar exista, aşa cum se poate vedea în figura 3.86, *b*. Într-o secțiune oarecare C a barei momentul încovoietor are valoarea $M_z = -P(l-x)$. Înlocuind această valoare a momentului în ecuația diferențială de ordinul doi a fibrei medii deformate (3.85) şi integrând de două ori se obține:

$$v=\frac{Pl}{EI_z}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{P}{EI_z}\cdot\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2.$$

Pentru determinarea celor două constante de integrare C_1 şi C_2 se pun condițiile:

$$x=0\rightarrow\begin{cases} v_A=0\Rightarrow C_2=0\\ \varphi_A=\left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0\Rightarrow C_1=0\end{cases}$$

În consecință, ecuația fibrei medii deformate a consolei AB din fig. 3.86, *b*, solicitată de forța

P, este:

$$v = \frac{P}{EI_z} \cdot \frac{x^2}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right).$$

Dacă se înlocuieşte l cu $l - \tilde{x}$ iar x cu $x - \tilde{x}$ se obține expresia lui v_3:

$$v_3 = \frac{P}{EI_z} \cdot \frac{(x-\tilde{x})^2}{2}\left(l - \tilde{x} - \frac{x-\tilde{x}}{3}\right).$$

Însumând cele trei valori se obține săgeata în secțiunea curentă x:

$$v = \frac{\tilde{x}}{2r} + \frac{\tilde{x}}{r}(x-\tilde{x}) + \frac{P}{EI_z} \cdot \frac{(x-\tilde{x})^2}{2}\left(l - \tilde{x} - \frac{x-\tilde{x}}{3}\right)$$

Pentru $x = l$ se obține săgeata punctului B:

$$v_B = \frac{\tilde{x}}{2r} + \frac{\tilde{x}}{r}(l-\tilde{x}) + \frac{P}{EI_z} \cdot \frac{(l-\tilde{x})^3}{3}.$$

Înlocuind în această expresie pe $\tilde{x} = l - \frac{EI_z}{P \cdot r}$ se obține:

$$v_B = \frac{l^2}{2r} - \frac{(EI_z)^2}{6P^2 r^3}.$$

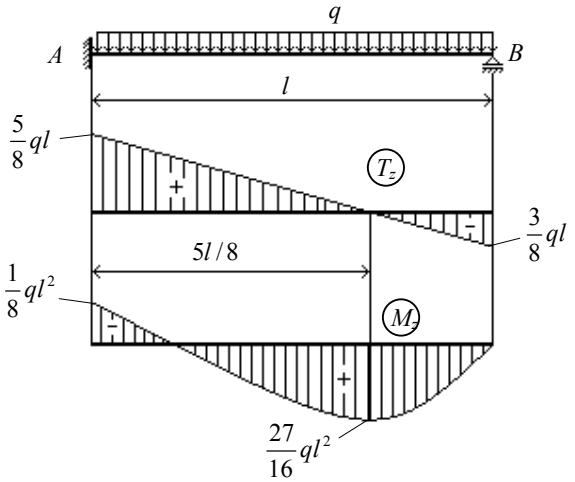


Fig. 3.87.

P.3.50. Se consideră grinda din figura 3.87, încastrată la un capăt şi simplu rezemată la celălalt, solicitată de o sarcină uniform distribuită de intensitate q. Să se traseze diagramele eforturilor secționale T_z şi M_z.

Pentru trasarea diagramelor de eforturi secționale este necesar să se determine forțele de legătură. Se constată însă că numărul acestora este 4 (trei în încastrarea A şi una în reazemul simplu B). Numărul ecuațiilor de echilibru ce pot fi scrise este 3. În consecință sistemul fiind o dată static nedeterminat (4 – 3 = 1), diagramele de eforturi secționale nu pot fi trasate deoarece din ecuațiile de echilibru nu pot fi determinate toate forțele de legătură.

Pentru rezolvarea problemei se va utiliza ecuația diferențială de ordinul IV a fibrei medii deformate (3.87) care, pentru cazul studiat este:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = \frac{q_y}{EI}.$$

Prin integrări succesive se obține:

$$EI_z \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = qx + C_1; \qquad EI_z \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = q\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2;$$

$$EI_z \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3; \qquad EI_z \cdot v = q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Pentru determinarea constantelor de integrare C_i (i = 1,2,3,4) se pun următoarele condiții la limită:

- în A pentru $x = 0 \rightarrow \begin{cases} v_A = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ \varphi_A = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \end{cases}$

- în B pentru $x = l \rightarrow \begin{cases} v_B = 0 \Rightarrow q\dfrac{l^4}{24} + C_1\dfrac{l^3}{6} + C_2\dfrac{l^2}{2} = 0 \\ M_B = 0 \Rightarrow q\dfrac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 = 0 \end{cases}$

Prin rezolvarea sistemului se obține: $C_1 = -\frac{5}{8}ql$ şi $C_2 = \frac{1}{8}ql^2$.

În consecință, ecuația fibrei medii deformate este:

$$v = \frac{1}{24}\frac{ql^4}{EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{5}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right].$$

Folosind relațiile (3.89) şi (3.88) se determină modul de variație al forței tăietoare T_z şi al momentului încovoietor M_z:

$$T_z = -\frac{1}{24}ql\left(24\frac{x}{l} - 15\right);$$

$$M_z = -\frac{1}{24}ql^2\left[12\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 15\left(\frac{x}{l}\right) + 3\right].$$

Pe baza acestor egalități s-au trasat diagramele din figura 3.87.

Momentul încovoietor are valoare maximă în secțiunea unde forța tăietoare se anulează. Din condiția $T_z = 0$ rezultă $x = 5l/8$, valoare care introdusă în expresia momentului încovoietor conduce la $M_{\max} = \frac{27}{16}ql^2$.

P.3.51. Pentru grinda simplu rezemată din figura 3.88 să se determine fibra medie deformată precizându-se rotirile pe reazeme şi săgeata în C.

Se aplică metoda parametrilor în origine. Alegând originea sistemului de referință în punctul A

şi cunoscând parametrii $M_0 = 0$ şi $T_0 = -2qa$, expresia (3.91) pentru încărcările din figura 3.88 devine:

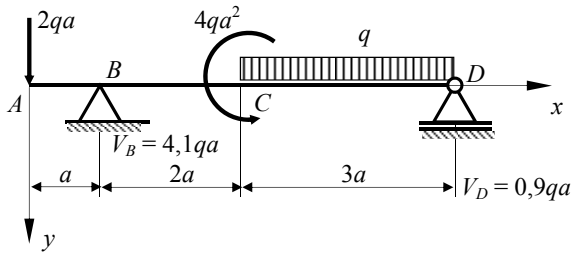


Fig. 3.88.

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{2qa}{EI_z}\frac{x^3}{6} - \frac{4{,}1qa}{EI_z}\frac{[x-a]^3}{6} + \frac{4qa^2}{EI_z}\frac{[x-3a]^2}{2} + \frac{q}{EI_z}\frac{[x-3a]^4}{24} -$$
$$- \frac{q}{EI_z}\frac{[x-6a]4}{24} - \frac{0{,}9qa}{EI_z}\frac{[x-6a]^3}{6}$$

Termenii cu paranteze drepte intervin numai pe intervalele în care valorile parantezelor sunt pozitive. În consecinţă, deoarece pentru bara considerată $x \le 6a$, ultimii doi termeni nu se mai iau în considerare.

Necunoscutele sunt v_0 şi φ_0.

Pentru determinarea lor se pun condiţiile la limită:

$$\begin{cases} \text{pentru } x = a \rightarrow v_B = 0; \\ \text{pentru } x = 6a \rightarrow v_D = 0; \end{cases}$$

din care rezultă:

$$\begin{cases} 0 = v_0 + \varphi_0 a - 0{,}3333\dfrac{qa^4}{EI_z} \\ 0 = v_0 + \varphi \cdot 6a + \dfrac{2qa}{EI_z}\dfrac{(6a)^3}{6} - \dfrac{4{,}1qa}{EI_z}\dfrac{(5a)^3}{6} + \dfrac{4qa^2}{EI_z}\dfrac{(3a)^2}{2} + \dfrac{q}{EI_z}\dfrac{(3a)^4}{24} \end{cases}$$

Din rezolvarea sistemului rezultă: $\varphi_0 = -1{,}525\dfrac{qa^3}{EI_z}$; $v_0 = 1{,}192\dfrac{qa^4}{EI_z}$.

Pentru determinarea rotirilor pe reazeme se foloseşte expresia (3.92), care, pentru încărcările

din figura 3.88, capătă forma:

$$\varphi = \varphi_0 x + \frac{2qa}{EI_z}\frac{x^2}{2} - \frac{4{,}1qa}{EI_z}\frac{[x-a]^2}{2} + \frac{4qa^2}{EI_z}[x-3a] + \frac{q}{EI_z}\frac{[x-3a]^3}{6}$$

Pentru $x = a$ rezultă:

$$\varphi_B = -1{,}525\frac{qa^3}{EI_z} + \frac{2qa}{EI_z}\frac{a^2}{2} = -0{,}525\frac{qa^3}{EI_z},$$

iar pentru $x = 6a$ se obține rotirea din punctul D:

$$\varphi_D = -1{,}525\frac{qa^3}{EI_z} + \frac{2qa}{EI_z}\frac{(6a)^2}{2} - \frac{4{,}1qa}{EI_z}\frac{(5a)^2}{2} + \frac{4qa^2}{EI_z}(3a) + \frac{q}{EI_z}\frac{(3a)^3}{6} = -0{,}275\frac{qa^3}{EI_z}$$

Folosind expresia fibrei medii deformate în care $x = 3a$, săgeata în punctul C este:

$$v_C = 1{,}192\frac{qa^4}{EI_z} - 1{,}525\frac{qa^3}{EI_z}3a + \frac{2qa}{EI_z}\frac{(3a)^3}{6} - \frac{4{,}1qa}{EI_z}\frac{(2a)^3}{6} = 0{,}1503\frac{qa^4}{EI_z}.$$

Probleme suplimentare

P.3.52. Consola din figura 3.89 de lungime l = 2 m, este solicitată de o sarcină uniform distribuită de intensitate q = 12 N/m. Să se dimensioneze secțiunea barei pentru σ_a = 150 N/mm^2 şi să se reprezinte variația tensiunilor σ şi τ_{xy} în secțiunea B.

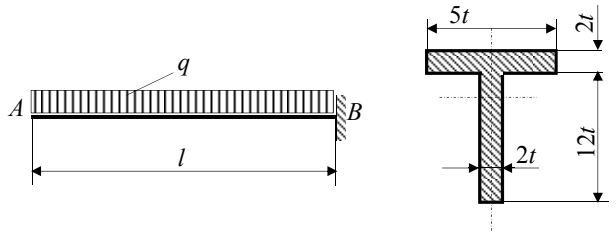


Fig 3.89.

P.3.53. O grindă simplu rezemată (fig. 3.90) de lungime l = 4 m este acționată de o sarcină uniform distribuită q = 15 N/m. Materialul din care este confecționată grinda are rezistența admisibilă σ_a = 150 N/mm^2. Să se dimensioneze grinda şi să se determine săgeata ei maximă.

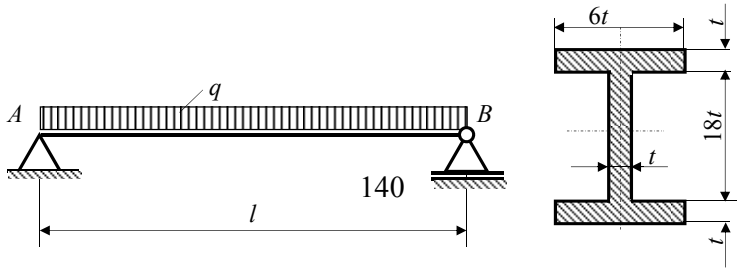


Fig. 3.90.

P.3.54. Bara din figura 3.91 are secțiunea dreptunghiulară şi este obținută dintr-un semifabricat cu secțiunea rotundă cu diametrul *D*. Ea este solicitată de o sarcină liniar distribuită cu intensitatea maximă q = 12 N/m, iar lungimea ei este l = 0,6 m. Ştiind că σ_a = 150 N/mm^2 se cer: *a*) diagramele de eforturi; *b*) dimensionarea barei stabilindu-se raportul optim dintre înălțimea *h* şi lățimea *b* a secțiunii; *c*) distribuția tensiunilor σ în secțiunea în care forța tăietoare se anulează.

P.3.55. . Pentru bara din figura 3.92 să se determine fibra medie deformată şi să se precizeze rotirile din *B* şi *C* şi v_{max}.

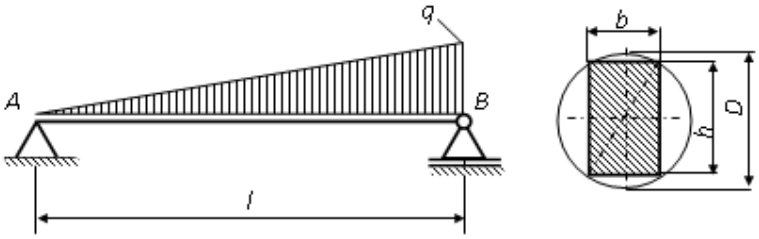


Fig. 3.91.

P.3.56. Pentru o grindă încastrată la capete (fig. 3.93), cu momentul de inerție constant, se cere să se traseze diagramele de eforturi şi săgeata maximă pentru o sarcină uniform distribuită pe toată deschiderea.

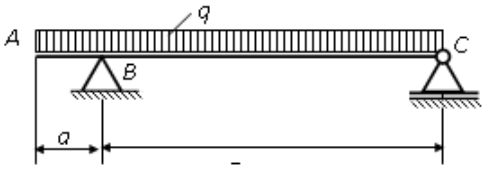


Fig. 3.92

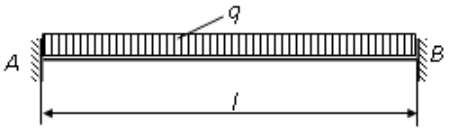
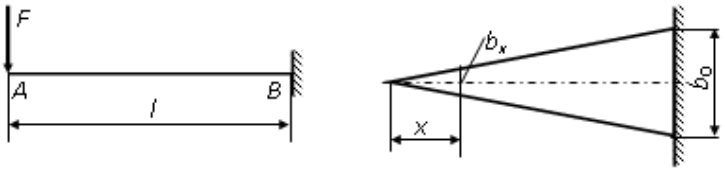


Fig. 3.93

P.3.57. Pentru consola din figura 3.94, *a* acționată de sarcina concentrată *F* se cer: *a*) fibra medie deformată cu precizarea valorilor v_A şi φ_A pentru cazul în care momentul de inerție al barei este constant şi egal cu I_0; *b*) săgeata şi rotirea cea mai mare în cazul în care lățimea secțiunii transversale variază liniar $b_x = b_0 \dfrac{x}{l}$ (fig. 3.94, *b*).



a) b)

Fig. 3.94.

3.5. TORSIUNEA BARELOR DREPTE CU SECŢIUNE CIRCULARĂ

O bară sau un tronson de bară este solicitată la răsucire (torsiune) atunci când în orice secțiune dreaptă a ei apare ca efort secțional numai un moment dirijat după axa x, M_x – notat uneori şi M_t (fig. 3.95). Pentru ca o bară să fie solicitată la torsiune trebuie ca cel puțin una din forțele care solicită bara să nu întâlnească axa acesteia.

În conformitate cu convenția de semne precizată în subcapitolul 1.3, momentul de răsucire este pozitiv când, pe fața din dreapta secțiunii, el este orientat în sensul axei x (de exemplu, în fig. 3.95, momentul $3Fb$, dat de cuplul de forțe $3F$, este pozitiv deoarece are vectorul orientat în sensul axei x).

Pentru reprezentarea grafică a momentului M_x se face următoarea convenție, diferită de convenția adoptată în cazul momentului de încovoiere, valorile pozitive se reprezintă deasupra axei barei, iar cele negative sub axa barei (fig. 3.95).

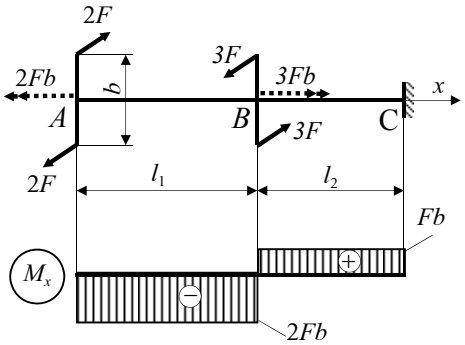


Fig. 3.95.

3.5.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Deoarece în planul secțiunii drepte a barei torsorul eforturilor secționale se reduce numai la un vector M_x dirijat după axa barei relațiile de echivalență (1.29) devin:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_{(A)} \sigma_x \mathrm{d}A = 0; & M_x &= \int_{(A)} (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y)\mathrm{d}A \neq 0;\\
T_z &= \int_{(A)} \tau_{xy} \mathrm{d}A = 0; & M_y &= -\int_{(A)} \sigma_x z \mathrm{d}A = 0;\\
T_y &= \int_{(A)} \tau_{xz} \mathrm{d}A = 0; & M_z &= \int_{(A)} \sigma_x y \mathrm{d}A = 0.
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

Pentru a stabili modul de distribuție al tensiunilor se apelează la studiul aspectului geometric care furnizează relații între deformații specifice şi deplasări.

În acest scop se consideră o bară dreaptă cu secțiunea circulară (fig. 3.96, *a*) pe suprafața căreia se trasează două curbe directoare, la o distanța foarte mică una față de cealaltă, d*x*. Aceste curbe pot reprezenta intersecția dintre suprafața exterioară a barei şi două secțiuni drepte, infinit apropiate. Între cele două curbe directoare se trasează o serie de generatoare foarte apropiate între ele, care pot fi considerate segmente de lungime d*x* din fibrele situate la suprafața exterioară a barei (fig. 3. 96, *a*).

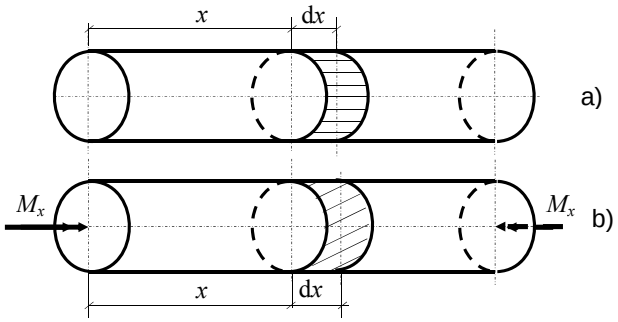


Fig.3.96.

După ce bara este solicitată de către un moment de răsucire pozitiv, M_x (fig. 3.96, *b*), se constată următoarele:

– cercurile rămân tot cercuri şi la aceeaşi distanță d*x*, fapt ce dovedeşte că secțiunea transversală rămâne plană

– toate generatoarele (care se identifică cu fibrele de la exteriorul barei) rămân paralele între ele, fiind înclinate cu acelaşi unghi față de tangentele corespunzătoare la curbele directoare.

Rezultă că la exteriorul barei:

$$\varepsilon_0 = 0. \; ; \; \gamma_0 = \text{ct.} \tag{3.94}$$

În baza observațiilor anterioare în interiorul barei are loc un fenomen similar, fapt ce conduce la concluzia că cele două secțiuni, situate la depărtarea d*x*, s-au rotit rigid între ele cu un unghi dφ (fig. 3.97).

În conformitate cu figura 3.97 se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{\overline{nn'}}{\mathrm{d}x} \\ \overline{nn'} &= r\mathrm{d}\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \text{ct.} \tag{3.95}$$

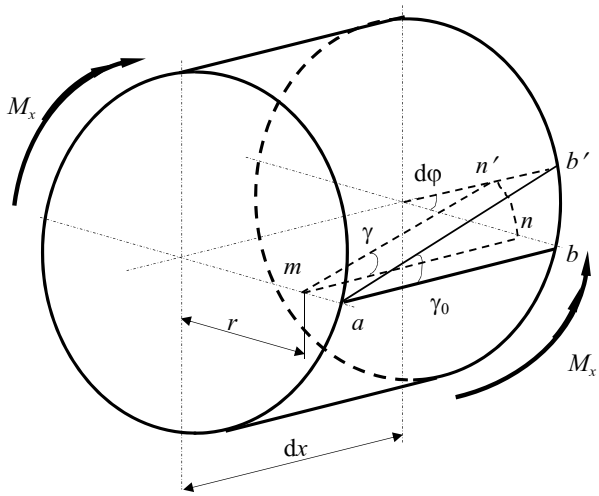


Fig. 3.97.

Relațiile aspectului fizic sunt cele furnizate de legea simplă a lui Hooke:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon \ ; \ \tau = G\cdot\gamma \tag{3.96}$$

cu observația că tensiunea tangențială τ va fi tangentă la arcul $\overline{nn'}$, adică perpendiculară pe direcția razei (fig. 3.98). Rezultă:

$$\tau_{xy} = \tau\cdot\cos\alpha \ ; \ \tau_{xz} = -\tau\cdot\sin\alpha. \tag{3.97}$$

Egalitățile $\varepsilon = 0$ şi $\sigma = E\cdot\varepsilon$ conduc la concluzia că prima, a cincea şi a şasea egalitate din (3.93) sunt identic satisfăcute.

Având în vedere relația $\tau = G\gamma$ şi expresia deformației specifice unghiulare dată de relația (3.95), a doua egalitate (3.93) se scrie astfel:

$$T_y = \int_{(A)} \tau\cos\alpha \mathrm{d}A = G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_{(A)} r\cos\alpha \mathrm{d}A = G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_{(A)} z\mathrm{d}A = 0$$

deoarece $z = r\cos\alpha$ (fig. 3.98), iar $\int_{(A)} z\mathrm{d}A = S_y = 0$ reprezintă momentul static al secțiunii în raport cu axa y care este axă centrală.

Analog:

$$T_z = -\int_{(A)} \tau\sin\alpha \mathrm{d}A = \left(-G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\int_{(A)} r\sin\alpha \mathrm{d}A = \left(-G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\int_{(A)} y\mathrm{d}A = 0\,.$$

În condițiile precizate, egalitatea a patra din (3.93) capătă forma:

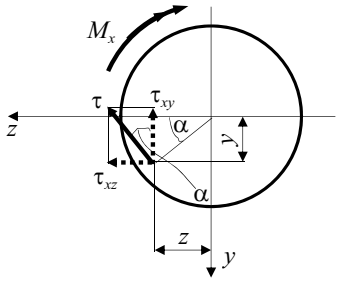


Fig. 3.98.

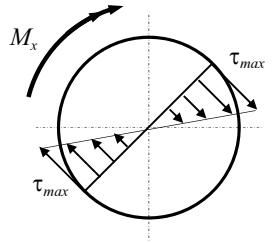


Fig. 3.99.

$$M_x = \int_{(A)} (z \cdot \tau \cos\alpha + y \cdot \tau \sin\alpha) \mathrm{d}A = \int_{(A)} \tau (r \cos^2 \alpha + r \sin^2 \alpha) \mathrm{d}A = \int_{(A)} \tau r \mathrm{d}A$$

sau, având în vedere aspectul fizic şi cel geometric,

$$M_x = G \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \int_{(A)} r^2 \mathrm{d}A = G \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} I_p , \tag{3.98}$$

în care I_p este momentul de inerţie polar al secţiunii circulare în raport cu centrul ei de greutate. Raportul $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ reprezintă rotirea a două secţiuni ale barei, situate la depărtarea dx una faţă de alta, şi poartă numele de *răsucire specifică*. Din relaţiile (3.95) şi (3.98) rezultă că:

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \cdot r , \tag{3.99}$$

relaţie care determină variaţia tensiunii tangenţiale τ pe secţiunea circulară a unei bare solicitate la torsiune. Se constată că pe secţiunea dreaptă tensiunile τ variază liniar (fig. 3.99), punctele cele mai solicitate fiind toate punctele de la periferia secţiunii unde τ atinge valoarea maximă pe secţiune:

$$\tau_{\max,\mathrm{sec}t} = \frac{M_x}{I_p} r_{\max} . \tag{3.100}$$

3.5.2. Calculul de rezistenţă

Tensiunea tangenţială maximă din cuprinsul barei se va găsi în secţiunea periculoasă, secţiune în care momentul de torsiune are valoarea maximă $M_x^{\max}$ şi care se identifică pe baza diagramei M_x.

Condiția de rezistență pentru o bară dreaptă cu secțiune circulară solicitată la torsiune are forma:

$$\tau_{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{W_p} \le \tau_a, \tag{3.101}$$

unde $W_p = \dfrac{I_p}{r_{\max}}$ reprezintă modulul de rezistență la torsiune al secțiunii circulare.

În cazul secțiunii circulare pline, pentru care $I_p = \pi d^4/32$ şi $r_{\max} = d/2$:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \tag{3.102}$$

iar pentru cazul secțiunii inelare, la care $I_p = \pi D^4/32 - \pi d^4/32$ şi $r_{\max} = D/2$:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]. \tag{3.103}$$

Relația (3.101) se foloseşte atât pentru dimensionare, caz în care dimensiunile secțiunii barei se determină din egalitatea:

$$W_p^{nec} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{\tau_a} = W_p^{\dim}, \tag{3.104}$$

cât şi pentru verificarea unor secțiuni. De asemenea, pe baza relației (3.101) se poate determina efortul secțional capabil al unei bare cu secțiune circulară solicitată la torsiune:

$$M_x^{\max} \le M_x^{cap} = \tau_a W_p^{ef}. \tag{3.105}$$

Observație. Când barele solicitate la torsiune sunt piese în mişcare de rotație în jurul axului lor ele poartă numele de *arbori* şi reprezintă organe de maşini. Solicitarea la torsiune a acestora se face prin intermediul unor transmisii (prin lanț, curele sau diverse angrenaje) care transmit un cuplu de la un motor, ce poate dezvolta o putere P, cu un anumit număr de rotații pe minut n. Dacă puterea P a motorului este exprimată în kW, cuplul motor transmis prin intermediul arborelui se calculează cu relația:

$$M_x = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{P[\text{kW}]}{n[\text{rot/min}]}\,[\text{N}\cdot\text{m}]. \tag{3.106}$$

3.5.3. Tensiuni pe secţiuni înclinate la bare solicitate la torsiune

Fie un tub subțire solicitat la torsiune ca în figura 3.100, *a*. Pe fețele unui inel detaşat din tub se dezvoltă tensiuni tangențiale τ, al căror sens de rotire în jurul axei de simetrie a tubului este acelaşi cu cel al momentului de torsiune M_x (fig. 3.100, *b*). Dacă se detaşează un element *abcd* din inelul considerat, pe fețele lui se dezvoltă numai tensiuni tangențiale τ după cum se poate vedea în figura 3.100, *c*.

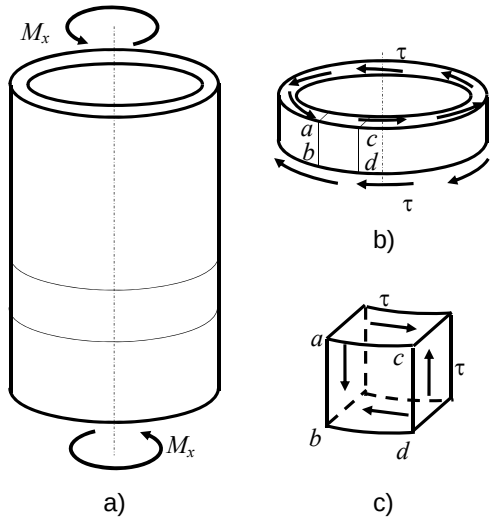


Fig.3.100.

Se constată că starea de tensiuni din tubul subțire solicitat la torsiune este o stare plană de tensiuni – în planele perpendiculare pe normalele la axul de rotație nu se dezvoltă tensiuni.

Să considerăm elementul *abcd* orientat față de un sistem de referință *xOyz* şi de grosime egală cu unitatea aşa ca în figura 3.101, *a*.

Pentru determinarea tensiunilor pe un plan înclinat cu unghiul α față de *Oy* se exprimă echilibrul elementului de volum din figura 3.101, *b*.

Proiectând pe direcția lui σ_α şi a lui τ_α toate forțele generate de tensiuni, se obține:

$$\sigma_\alpha \cdot 1 \cdot ds - \tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy \cdot \sin\alpha - \tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\tau_\alpha \cdot 1 \cdot ds - \tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy \cdot \cos\alpha - \tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx \cdot \sin\alpha = 0.$$

Deoarece $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $dx = ds \cdot \sin\alpha$ şi $dy = ds \cdot \cos\alpha$ din cele două ecuații rezultă:

$$\sigma_\alpha = \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \tag{3.107}$$

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \tag{3.108}$$

Se observă că pe plane înclinate cu $\alpha = \pm 45^o$ tensiunile au valorile:

$$\sigma_{45^o} = \pm\tau_{xy} \quad ; \quad \tau_{45^o} = 0 .$$

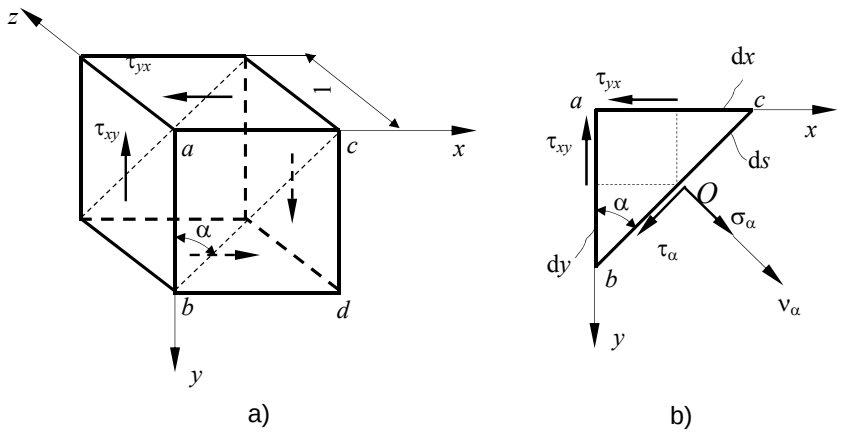


Fig. 3.101.

Acelaşi rezultat se obține dacă în expresia tensiunilor principale (3.79) se face $\sigma_x = \sigma_y = 0$ (corespunzător solicitării de forfecare pură)

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}. \tag{3.109}$$

Se constată că, în cazul solicitării de forfecare pură, tensiunile principale sunt egale şi de semne contrare şi se dezvoltă în plane dispuse la 45° (fig. 3.102, *b*).

3.5.4. Deformarea barelor drepte cu secţiune circulară solicitate la torsiune

După cum s-a demonstrat anterior, datorită solicitării la torsiune, două secțiuni ale barei, infinit vecine, se rotesc rigid una față de alta, în jurul axei barei, cu unghiul:

$$\mathrm{d}\varphi = \gamma \frac{\mathrm{d}x}{r} = \frac{M_x}{GI_p}\mathrm{d}x\,. \tag{3.110}$$

Se constată că un vector de rotație dirijat în sensul pozitiv al axei x produce rotiri pozitive. În consecință un moment de torsiune pozitiv, al cărui vector pe fața din stânga secțiunii este dirijat în sensul negativ al axei x, produce rotiri negative (orare). Rezultă că două secțiuni, 1 şi 2, ale unei bare, se rotesc între ele cu unghiul:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{1-2} = -\int_1^2 \frac{M_x}{GI_p}\mathrm{d}x\,. \tag{3.111}$$

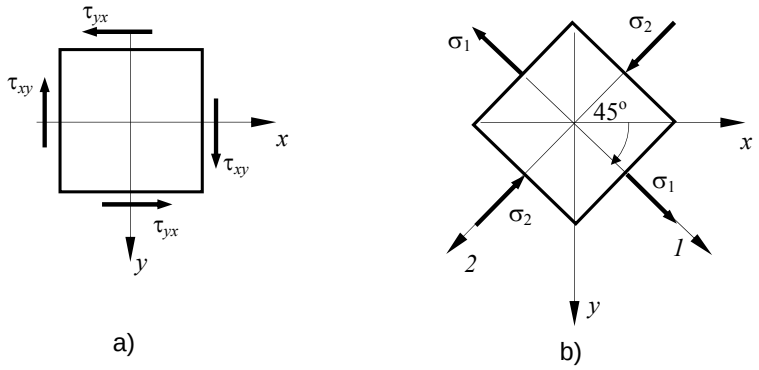


Fig. 3.102.

Dacă pe intervalul 1-2 bara are secțiune constantă atunci:

$$\varphi_{1-2} = -\frac{\Omega_{1-2}}{GI_p} \tag{3.112}$$

unde $\Omega_{1\text{-}2}$ reprezintă suprafața diagramei de moment M_x între secțiunile 1 şi 2.

Dacă pe intervalul 1-2 sunt m tronsoane cu secțiuni constante atunci:

$$\varphi_{1-2} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\Omega_i}{GI_{p,i}}, \tag{3.113}$$

unde Ω_i reprezintă aria diagramei momentului de torsiune pe tronsonul i, iar $I_{p,i}$ – momentul de inerție polar al tronsonului i.

În cazul organelor de maşini, pentru buna funcționare a subansamblului, maşinii sau instalației respective, este necesar ca deformarea arborilor să nu depăşească anumite limite. În aceste cazuri se impune o condiție de rigiditate sub forma:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{GI_p} \le \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a, \tag{3.114}$$

unde $\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a$ reprezintă *răsucirea specifică admisibilă*, care se prescrie în funcție de condițiile cinematice impuse de buna funcționare a subansamblului maşinii sau instalației respective.

Deoarece barele solicitate la torsiune au, în general deformații mari, de cele mai multe ori condiția de rigiditate (3.114) poate fi mai restrictivă decât condiția de rezistență (3.101). Din această cauză cele două condiții trebuie verificate obligatoriu.

3.5.5. Sisteme static nedeterminate la torsiune

O bară dublu încastrată la torsiune, care poate avea secțiunea variabilă, şi solicitată de cupluri de forțe ce au vectorii momentele dirijate după axa barei constituie un sistem static nedeterminat la torsiune (fig. 3.103, *a*).

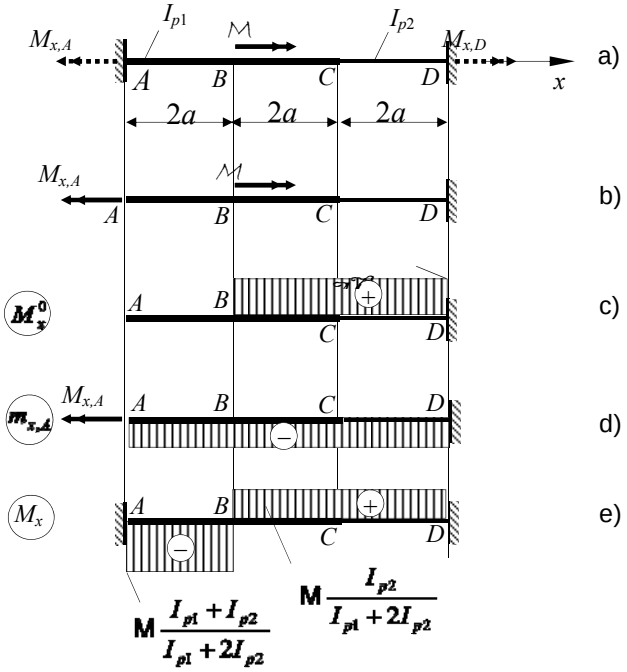


Fig. 3.103.

Sistemul este static nedeterminat deoarece pentru determinarea momentelor $M_{x,A}$ şi $M_{x,D}$ (fig. 3.103. *a*) aspectul static furnizează o singură ecuație şi anume ecuația de momente în raport cu axa barei (axa *x*):

$$-M_{x,A} + \mathcal{M} + M_{x,D} = 0. \qquad \text{(a)}$$

Pentru ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramei momentului de torsiune M_x se adoptă sistemul static determinat din figura 3.103, *b*, *numit forma de bază*, obținut din sistemul real prin suprimarea încastrării la torsiune din *A*. În locul legăturii suprimate se introduce momentul $M_{x,A}$ a cărui mărime urmează să o determinăm (direcția este cunoscută, iar sensul este ales arbitrar).

Sistemul static determinat din figura 3.103, *b*, adică forma de bază, se încarcă

pe rând cu cuplul $\mathcal{M}$ şi cu momentul $M_{x,A}$ trasându-se diagramele M_x^0 (fig.3.103,*c*) şi $m_{x,A}$ (fig. 3.103, *d*). Forma de bază solicitată de $\mathcal{M}$ şi de $M_{x,A}$, aplicând principiul suprapunerii efectelor, trebuie să se comporte ca sistemul real din figura 3.103, *a*. Această condiție este echivalentă cu a scrie:

$$\varphi_A^0 + \varphi'_A = 0, \tag{b}$$

în care φ_A^0 este rotirea la torsiune în secțiunea *A* produsă de $\mathcal{M}$ pe forma de bază, iar φ'_A, rotirea la torsiune în secțiunea *A* produsă de $M_{x,A}$ tot pe forma de bază.

Folosind diagramele momentelor de torsiune din figura 3.103, *c* si *d*, relația (3.111) capătă formele:

$$\varphi_D^0 - \varphi_A^0 = -\int_A^D \frac{M_x^0 \mathrm{d}x}{GI_p}; \qquad \varphi'_D - \varphi'_A = -\int_A^D \frac{m_{x,A}\mathrm{d}x}{GI_p}. \tag{c}$$

Cum şi în punctul *D* bara este încastrată şi în consecință $\varphi_D^0 = \varphi'_D = 0$, relațiile (c) devin:

$$\begin{aligned} \varphi_A^0 &= \frac{\mathcal{M}\cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{\mathcal{M}\cdot 2a}{GI_{p2}}; \\ \varphi'_A &= -\frac{M_{x,A}\cdot 4a}{GI_{p1}} - \frac{M_{x,A}\cdot 2a}{GI_{p2}} \end{aligned}. \tag{d}$$

Înlocuind expresiile lui φ_A^0 si φ'_A în ecuația (b) se obține:

$$\frac{M_{x,A}\cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{\left(-\mathcal{M} + M_{x,A}\right)\cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{\left(-\mathcal{M} + M_{x,A}\right)\cdot 2a}{GI_{p2}} = 0. \tag{e}$$

Din rezolvarea ecuației (e) rezultă:

$$M_{x,A} = \mathcal{M}\frac{I_{p1} + I_{p2}}{I_{p1} + 2I_{p2}}.$$

Odată nedeterminarea ridicată se poate trasa diagrama momentului de torsiune M_x, pe structura reală (fig. 3.103, *e*), încărcând sistemul static determinat ales cu cuplul *M* şi cu valoarea reală a momentului de legătură din încastrarea *A*, sau prin însumarea diagramelor M_x^0 si $m_{x,A}$, folosind valoarea obținută pentru $M_{x,A}$.

Pe baza diagramei M_x se poate calcula rotirea torsională a oricărei secțiuni a barei, folosind relația (3.111).

3.5.6. Calculul arcurilor elicoidale cu pasul mic

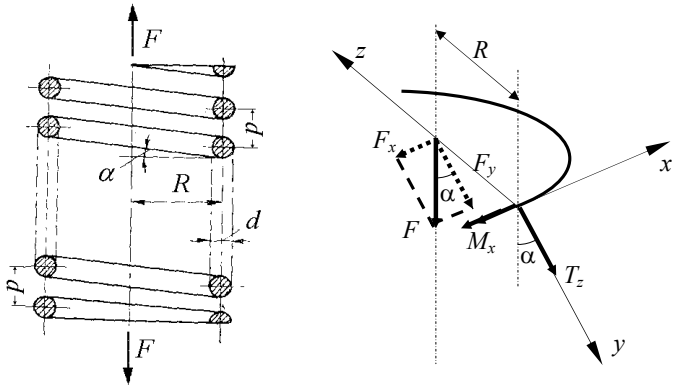
Arcurile elicoidale sunt elemente foarte des folosite în construcția de maşini şi sunt alcătuite dintr-o sârmă, de cele mai multe ori cu secțiune circulară, care are axa de forma unei elice cu pas constant. Elementele geometrice ale unui arc elicoidal sunt:

– raza R a cilindrului pe care este înfăşurată axa sârmei;

– diametrul d al secțiunii sârmei;

– numărul n de spire ale resortului;

– pasul elicei $p = 2\pi R \cdot \tan\alpha$ (fig. 3.104, *a*).



a) b)

Fig. 3.104.

3.5.6.1. Determinarea tensiunilor şi dimensionarea

Pentru a calcula eforturile secționale din spira resortului se definesc mai întâi axele intrinseci ale secțiunii astfel (fig. 3.104, *b*):

– axa x: tangentă la axa spirei în secțiunea considerată, în sensul de măsurare al arcelor;

– axa y: axa din planul secțiunii spirei conținută în planul tangent la suprafața cilindrului definit de axa spirei; axa y face unghiul α cu direcția generatoarei cilindrului înfăşurător;

– axa z: axa din planul secțiunii spirei perpendiculară pe planul tangent definit de axele x şi y; această axă intersectează axa arcului (adică a cilindrului înfăşurător) sub un unghi drept.

Se reduce apoi forța F (din urma secțiunii), în punctul unde axa z intersectează axa arcului şi se descompune, în acest punct, după direcțiile axelor x, y şi z. Deoarece axa z este perpendiculară pe axa arcului, deci şi pe direcția forței F, aceasta va avea doar componentele (fig. 3.104, *b*):

$$F_x = F\cdot\sin\alpha; \qquad F_y = F\cdot\cos\alpha.$$

Reducând acum aceste două forțe în axa spirei se obțin următoarele eforturi secționale:

$$N = F_x = F\cdot\sin\alpha; \qquad T_y = 0; \qquad T_z = -F_y = -F\cdot\cos\alpha;$$
$$M_x = -F_y\cdot R = -F\cdot R\cdot\cos\alpha; \quad M_y = -F_x\cdot R = -F\cdot R\cdot\sin\alpha; \quad M_z = 0.$$

Dacă unghiul $\alpha < 12^o$ arcul elicoidal se consideră cu pasul mic şi se pot face următoarele aproximații:

$$\sin\alpha \cong 0; \quad \cos\alpha \cong 1.$$

În baza acestor aproximații:

$$N \cong 0; \quad T_y \cong 0; \quad T_z \cong -F; \quad M_x \cong -F\cdot R; \quad M_y \cong 0; \quad M_z = 0.$$

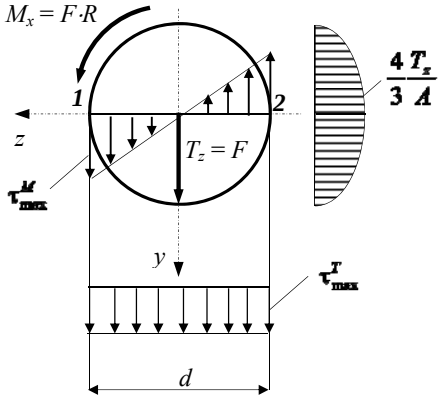


Fig. 3.105.

Rezultă că, în planul secțiunii drepte a spirei se dezvoltă numai eforturile secționale M_x şi T_z aşa cum se poate vedea în figura 3.105.

Ca urmare, în punctele din planul secțiunii drepte se dezvoltă numai tensiuni tangențiale, ale căror variații, sunt redate în figura 3.105.

În consecință tensiunile tangențiale τ_{Mx} (calculate cu relația (3.101))şi τ_{Tz} (vezi problema P.3.44), provocate de solicitării spirei arcului la torsiune, respectiv forfecare, se adună geometric. În punctele de pe dreapta *1–2* tensiunile au şi aceeaşi direcție, iar în punctul *1* ele au şi acelaşi sens. Rezultă că în toate punctele *1* de pe toate secțiunile spirei, tensiunea τ are valoarea maximă, oricare din aceste puncte putând fi punctul cel mai periculos din bară:

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^{M_x} + \tau_{\max}^{T_z} = \frac{M_x}{W_p} + \frac{4}{3}\frac{T_z}{A} \tag{3.115}$$

În cazul în care secţiunea spirei este rotundă $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ şi $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Din condiţia de rezistenţă (3.101) şi relaţia (3.115) rezultă formula de verificare a arcurilor elicoidale:

$$\tau_{\max} = \frac{FR}{W_p}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{d}{R}\right) \le \tau_a . \tag{3.116}$$

Se constată că, în cazul proiectării, condiţia de rezistenţă, transformată în relaţie de dimensionare, conţine doi parametri: d – diametrul secţiunii şi R – raza de înfăşurare a spirei. Din această cauză pentru dimensionare fie se va alege d şi se va calcula R, fie invers.

În cazul în care se calculează d se observă că ecuaţia de dimensionare obţinută din condiţia de rezistenţă (3.116) este de gradul trei. Pentru a evita rezolvarea acestei ecuaţii se procedează astfel:

– se face o pre-dimensionare a secţiunii spirei numai la torsiune folosind relaţia (3.104) şi se alege o dimensiune puţin mai mare;

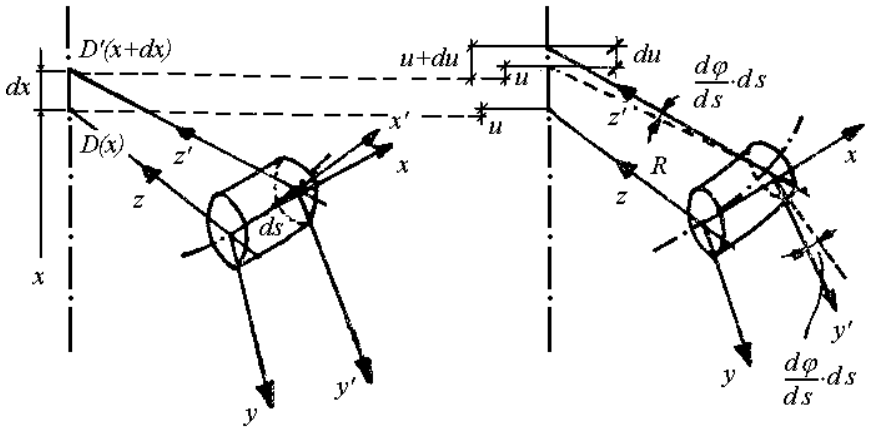
– folosind dimensiunile adoptate, se verifică în mod obligatoriu condiţia de rezistenţă (3.116).

3.5.6.2. Calculul săgeţii resortului

Se consideră un element de spiră de lungime ds la distanţa s faţă de unul din capetele arcului nedeformat. Cele două axe z şi z', din planele secţiunilor drepte ce delimitează elementul de spiră de lungime ds, intersectează axa arcului în punctele D, respectiv D', situate la departarea X, respectiv X + dX de capătul arcului faţă de care s-a măsurat distanţa s (fig. 3.106, *a*).

După deformare, punctul D se deplasează pe axa arcului cu u, iar punctul D' cu u + du (fig. 3.106, *b*). Deplasarea elementară du este consecinţa deformării elementului de spiră de lungime ds ca urmare a torsiunii, adică a rotirii elementare a celor două secţiuni ale sale cu unghiul $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{d}s$ (cu neglijarea unor cantităţi elementare de ordin superior)(fig. 3.106, *b*). Din figură rezultă:

$$\mathrm{d}u = R \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{d}s ,$$



a) b)

Fig. 3.106.

Dacă se neglijează efectul forței tăietoare, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ este răsucirea specifică care, conform cu (3.109), are expresia:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{M_x}{GI_p} = \frac{FR}{GI_p}.$$

În concluzie, înlocuind expresia răsucirii specifice în cea a deplasării du, rezultă:

$$\mathrm{d}u = \frac{FR^2}{GI_p}\mathrm{d}s,$$

sau, după integrare între capetele resortului:

$$v = u_2 - u_1 = \frac{FR^2}{GI_p}s_{1-2}$$

unde $s_{1\text{-}2}$ este lungimea totală a axei spirei arcului, egală cu de n ori lungimea unei spire a elicei. În cazul arcurilor elicoidale la care $\alpha < 12^{\circ}$ pasul este mic, se poate aproxima lungimea unei spire cu circumferința cercului de înfăşurare şi deci $s_{1\text{-}2} = 2\pi Rn$. Înlocuind în expresia săgeții resortului se obține:

$$v = \frac{2\pi FR^3}{GI_p}n. \qquad (3.117)$$

În cazul arcului cu spira cu secțiune circulară, unde $I_p = \pi d^4/32$, săgeata este:

$$v = \frac{64FR^3}{Gd^4} n \,. \tag{3.118}$$

Între intensitatea forței F cu care arcul este solicitat şi deplasarea elastică v (săgeata arcului), există relația:

$$F = kv, \tag{3.119}$$

unde k este constanta elastică a arcului şi are ca unități de măsură N/m.

3.5.6.3. Sisteme static nedeterminate cu arcuri

Două arcuri elicoidale, cu dimensiunile geometrice cunoscute, se asamblează ca în figura 3.107, *a* şi sunt solicitate de o forță F.

Se notează cu F_1 forța preluată de arcul *1*, a cărui constantă elastică este k_1, şi cu F_2 forța preluată de arcul *2* a cărui constantă elastică este k_2.

Pentru determinarea forțelor F_1 şi F_2, se studiază mai întâi aspectul static al problemei. Pentru acesta se izolează nodul B, prin secționarea arcurilor, şi se obține sistemul de forțe din figura 3.107, *b*. Din echilibrul acestuia rezultă:

$$F_1 + F_2 = F \,. \tag{a}$$

Se constată că sistemul este o dată static nedeterminat. Pentru rezolvarea lui se apelează la aspectul geometric al problemei şi se constată că, întrucât punctul B este comun ambelor arcuri, există relația de compatibilitate:

$$v_B = v_1 = v_2 \,. \tag{b}$$

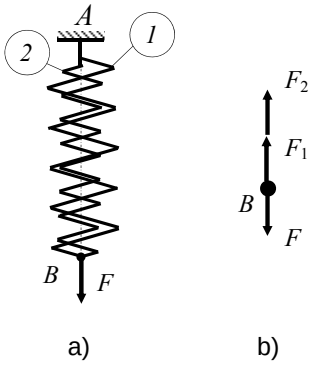


Fig. 3.107.

Deoarece săgețile v_1 şi respectiv v_2 nu sunt cunoscute, se folosesc relațiile (3.118) şi (3.119) – care exprimă aspectul fizic al problemei – obținându-se o a doua ecuație:

$$\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} \,. \tag{c}$$

Rezolvând acum sistemul format din ecuațiile (a) şi (c) se determină cele două forțe:

$$F_1 = F\frac{k_1}{k_1+k_2}; \qquad F_2 = F\frac{k_2}{k_1+k_2}. \tag{d}$$

Se constată că forța F se distribuie celor două arcuri proporțional cu coeficienții de rigiditate.

Observație. Pentru ca un sistem static nedeterminat cu arcuri să fie proiectat rațional, este necesar ca toate arcurile care îl alcătuiesc să îndeplinească condiția de rezistență la limită, adică arcurile să fie toate solicitate la capacitatea lor portantă. Pentru aceasta, arcurile trebuie executate cu lungimi diferite, din care cauză la montaj vor apărea tensiuni inițiale. Astfel, dacă arcul *2* din figura 3.107, *a* este mai scurt cu Δ decât arcul *1* atunci, aspectul geometric al problemei dat de egalitatea (b) devine:

$$v_1 = v_2 - \Delta. \tag{e}$$

Această egalitate împreună cu relațiile (a) şi (c) permit determinarea lui F_1 şi F_2:

$$F_1 = F\frac{k_1}{k_1+k_2} - \Delta\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}; \quad F_2 = F\frac{k_2}{k_1+k_2} + \Delta\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}. \tag{f}$$

Prin egalarea cu eforturile capabile deduse din formula (3.116), se ajunge la un sistem de ecuații din care se determină valoarea optimă a lui Δ şi valoarea maximă a forței F pe care o poate suporta sistemul de arcuri.

Probleme rezolvate

P.3.58. Bara *ABCE* din figura 3.108, *a* este acționată de cuplurile concentrate în *B*, *C* şi *E*, ce au acelaşi braț, $b = 0{,}3$ m, iar intensitatea forței $F = 13$ kN. Ştiind că $\tau_a = 60$ N/mm^2 şi că răsucirea specifică admisibilă $(d\varphi/dx) = (1/4)$ ^{o}/m să se dimensioneze bara şi să se adopte varianta economică între cazul în care secțiunea este circulară plină şi cazul în care secțiunea este inelară cu $d/D = 0{,}7$ (fig. 3.108, c).

Dacă se reduc cuplurile de forțe în axa barei şi se consideră $\mathcal{M} = Fb$ se trasează diagrama momentului de torsiune din figura 3.108, *b*. Se menționează că reprezentarea se face cu momentul M_x pozitiv deasupra axei barei (ca la forța tăietoare).

Se constată că intervalul cel mai solicitat este *BC* pe care $M_x = 3\mathcal{M} = 3\cdot 13\cdot 0{,}3 = 11{,}7$ kNm.

Pentru dimensionare se foloseşte relația (3.104) şi se calculează mai întâi modulul de rezistență necesar la torsiune:

$$W_p^{nec} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{\tau_a} = \frac{11{,}7\cdot 10^6}{60} = 1{,}95\cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$

Pentru secțiunea circulară:

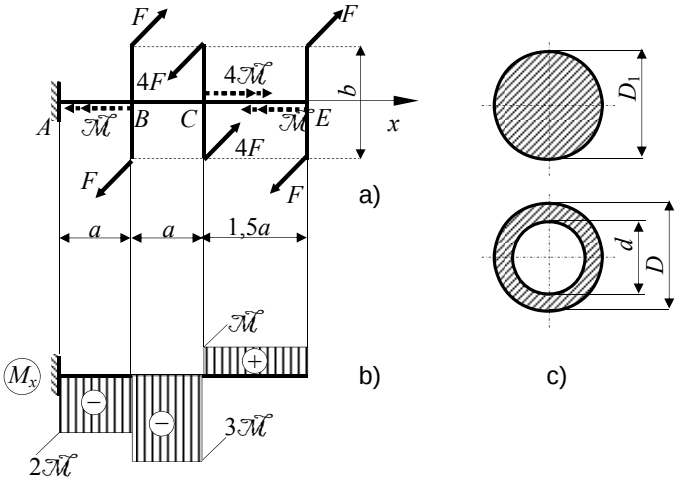


Fig. 3.108.

$$W_p^{\dim} = \frac{\pi D_1^3}{16} = 1{,}95 \cdot 10^5 \Rightarrow D_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}95 \cdot 10^5}{\pi}} = 99{,}77 \text{ mm}.$$

Se adoptă D_1 = 100 mm şi se face verificarea cu condiția de rezistență (3.101):

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{W_p^{ef}} = \frac{11{,}7 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 100^3}{16}} = 59{,}58 \text{ N/mm}^2 < \tau_a = 60 \text{ N/mm}^2.$$

Se face verificarea condiției de rigiditate cu relația (3.114):

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{GI_p} = \frac{11{,}7 \cdot 10^6}{8{,}1 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 100^4}{32}} = 1{,}47 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} >$$

$$> \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{1000} = 4{,}36 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}.$$

Deoarece condiția de rigiditate nu este îndeplinită dimensionarea se face prin transformarea relației (3.114) în formulă de dimensionare:

$$I_p^{nec} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{G\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a} = \frac{11{,}7 \cdot 10^6}{(8{,}1 \cdot 10^4)(4{,}36 \cdot 10^{-6})} = 3{,}31 \cdot 10^7 \text{ mm}^4.$$

Din egalitatea:

$$3{,}31\cdot 10^7 = \frac{\pi D_1^4}{32} \Rightarrow D_1 = \sqrt[4]{\frac{32\cdot 3{,}31\cdot 10^7}{\pi}} = 135{,}5\ \text{mm}.$$

Procedând analog pentru secțiunea inelară se obține:

$$W_p^{\dim} = \frac{\pi D^3}{16}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{\pi D^3}{16}(1-0{,}7^4) = 1{,}95\cdot 10^5 \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 1{,}95\cdot 10^5}{\pi(1-0{,}7^4)}} = 109{,}33\ \text{mm}.$$

Se adoptă $D = 110$ mm şi $d = 77$ mm şi se face verificarea condiției de rezistență:

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{11{,}7\cdot 10^6}{\frac{\pi\cdot 110^3}{16}\left[1-\left(\frac{77}{110}\right)^4\right]} = 58{,}9\ \text{N/mm}^2 < \tau_a.$$

Se verifică şi condiția de rigiditate:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{GI_p} = \frac{11{,}7\cdot 10^6}{8{,}1\cdot 10^4\cdot\frac{\pi\cdot 110^4}{32}\left[1-\left(\frac{77}{110}\right)^4\right]} = 1{,}32\cdot 10^{-5}\ \text{rad/mm} > \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a$$

şi se constată că nu este îndeplinită, fapt pentru care se dimensionează bara din condiția de deformație impusă:

$$3{,}31\cdot 10^7 = \frac{\pi D^4}{32}\left[1-\left(\frac{77}{110}\right)^4\right] \Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{32\cdot 3{,}31\cdot 10^7}{\pi\cdot\left[1-\left(\frac{77}{110}\right)^4\right]}} = 145{,}1\ \text{mm}.$$

În final se adoptă $D = 146$ mm şi $d = 102$ mm.

Pentru adoptarea variantei economice se calculează consumul de material pentru cele două tipuri de secțiune:

– bară cu secțiune circulară plină:

$$V_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}\cdot 3{,}5a = \frac{\pi\cdot 135{,}5^2}{4}\cdot 3{,}5\cdot 400 = 0{,}0201\ \text{m}^3;$$

– bară cu secțiune inelară:

$$V = \frac{\pi D^2}{4}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]\cdot 3{,}5a = \frac{\pi\cdot 146^2}{4}\left[1-\left(\frac{102}{146}\right)^2\right]\cdot 3{,}5\cdot 400 = 0{,}012\ \text{m}^3.$$

Se constată că varianta cu secțiune inelară este mai convenabilă, economia de material fiind de:

$$e = \frac{V_1 - V}{V_1} = \frac{0{,}0201-0{,}012}{0{,}0201}\cdot 100 = 40{,}3\ \%.$$

P.3.59. O bară cu secţiune inelară, cu lungimea l = 1,3 m, transmite un moment de torsiune M_x = 430 Nm. Răsucirea relativă a celor două capete ale barei nu trebuie să depăşească 2,5°. Cunoscând rezistenţa materialului barei la torsiune τ_a = 60 N/mm^2 şi modulul său de elasticitate transversal $G = 8{,}1\cdot 10^4$ N/mm^2, să se determine diametrul interior şi exterior al barei.

Din condiţia de dimensionare la torsiune (3.104) rezultă:

$$W_p^{nec} = \frac{430\cdot 10^3}{60} = W_p^{\dim} = \frac{I_p}{r_{\max}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}\cdot\frac{2}{D} \Rightarrow D^4 - d^4 = 36499{,}53D\,.$$

Rotirea relativă a celor două capete ale barei se calculează cu relaţia (3.111):

$$\varphi_{1-2} = \frac{M_x\cdot l}{GI_p} = \frac{(430\cdot 10^3)(1{,}3\cdot 10^3)}{(8{,}07\cdot 10^4)\dfrac{\pi}{32}(D^4 - d^4)} = \frac{70295{,}4}{D^4 - d^4}\ \text{rad.}$$

Această valoare nu trebuie să depăşească valoarea impusă:

$$\varphi_{\max} = 2{,}5\cdot\frac{\pi}{180} = 0{,}04363\ \text{rad.}$$

Egalând cele două valori rezultă:

$$D^4 - d^4 = 1{,}61117\cdot 10^6\,.$$

Rezolvând sistemul de două ecuaţii în care necunoscutele sunt D şi d se obţine:

$36499{,}53D = 1{,}61117\cdot 10^6$ sau D = 44,14 mm.

Înlocuind într-una din cele două ecuaţii se obţine d =38,45 mm. În final se adoptă D = 44,2 mm şi d = 38,4 mm.

P.3.60. Un arbore de transmisie are turaţia n = 340 rot/min. El primeşte prin intermediul roţii *2* o putere P_2 = 95 kW şi pune în mişcare maşini de lucru care consumă prin intermediul roţilor *1* şi *4* puteri egale $P_1 = P_4$ = 30 kW, iar prin intermediul roţii *3* puterea P_3 = 35 kW. Forma constructivă a arborelui prevede roţile aşezate lângă lagăre (fig. 3.109, *a*) pentru a nu solicita arborele şi la încovoiere. Să se calculeze diametrul secţiunii circulare pline a arborelui dacă τ_a = 60 N/mm^2 şi $\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)_a = 0{,}3\,{}^{\circ}\!/\!_{\text{m}}$ şi lungimea l între roţile *1* şi *2* astfel ca rotirea relativă $\varphi_{1\text{-}4}$ să fie nulă ($G = 8{,}1\cdot 10^4$ N/mm^2).

Se consideră momentul motor $M_{x,2}$ pozitiv (în lungul axei x). Cu formula (3.105) se determină momentele de torsiune pe fiecare roată:

$$M_{x,1} = M_{x,4} = 9{,}55\cdot 10^3\cdot\frac{30}{340} = 842{,}65\ \text{Nm;}$$

$$M_{x,3} = 9{,}55\cdot 10^3\cdot\frac{35}{340} = 983{,}09\,\text{Nm;}$$

$$M_{x,2} = 9{,}55\cdot 10^3\cdot\frac{95}{340} = 2668{,}38\,\text{Nm.}$$

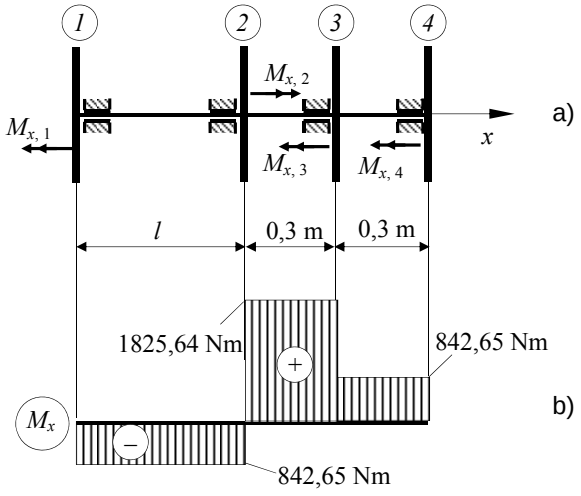


Fig. 3.109.

Cu ajutorul acestor valori s-a trasat diagrama M_x din figura 3.109, *b*.

Dimensionarea se va face pe fiecare tronson pentru a obține o formă economică a arborelui. Deoarece pe intervalele *1 - 2* şi *3 - 4* momentul de torsiune este acelaşi M_x = 842,65 Nm, cu formula (3.104) se obține:

$$W_p^{nec} = \frac{842{,}65 \cdot 10^3}{60} = 1{,}4044 \cdot 10^4 = W_p^{\dim} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Rezultă:

$$D = \sqrt{\frac{16 \cdot 1{,}4044 \cdot 10^3}{\pi}} = 41{,}51 \text{ mm}.$$

Se adoptă $D_{1-2} = D_{3-4} = 42$ mm şi se determină tensiunea maximă efectivă pentru verificare:

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{842{,}65 \cdot 10^3}{\dfrac{\pi \cdot 42^3}{16}} = 57{,}9 \text{ N/mm}^2 < \tau_a.$$

Deoarece condiția de rigiditate (3.114)

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{1-2} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{3-4} = \frac{842{,}65 \cdot 10^3}{(8{,}1 \cdot 10^4)\left(\dfrac{\pi \cdot 42^4}{32}\right)} = 34{,}05 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm} >$$

$$> \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_a = 0{,}3 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{1000} = 5{,}24 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

nu este îndeplinită, se dimensionează din condiția de deformație impusă:

$$I_p^{nec} = \frac{842{,}65 \cdot 10^3}{(8{,}1 \cdot 10^4)(5{,}24 \cdot 10^{-6})} = 1{,}9853 \cdot 10^6 = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow D = 67{,}06 \text{ mm}.$$

Se adoptă $D_{1-2} = D_{3-4} = 68$ mm.

Pentru intervalul 2-3 din condiția de rezistență rezultă:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1825{,}74 \cdot 10^3}{\pi}} = 53{,}71 \text{ mm}.$$

Se adoptă $D_{2\text{-}3} = 54$ mm care verifică condiția de rezistență:

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{1825{,}74 \cdot 10^3}{\dfrac{\pi \cdot 54^3}{16}} = 59 \text{ N/mm}^2 < \tau_a = 60 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece deformația maximă relativă pe acest interval:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{3-4} = \frac{1825{,}74 \cdot 10^3}{(8{,}1 \cdot 10^4)\left(\dfrac{\pi \cdot 54^4}{32}\right)} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm} > \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a = 5{,}24 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm},$$

se face redimensionarea din condiția de deformație impusă

$$I_p^{nec} = \frac{1825{,}74 \cdot 10^3}{(8{,}1 \cdot 10^4)(5{,}24 \cdot 10^{-6})} = 4{,}3015 \cdot 10^6 = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow D = 81{,}35 \text{ mm}.$$

Se adoptă $D_{2\text{-}3} = 82$ mm.

Rotirea relativă între roțile *1* şi *4* se determină cu relația (3.112):

$$\varphi_{1-4} = -\frac{1}{G}\left[-\frac{M_x^{1-2} l_{1-2}}{I_p^{1-2}} + \frac{M_x^{2-3} l_{2-3}}{I_p^{2-3}} + \frac{M_x^{3-4} l_{3-4}}{I_p^{3-4}}\right]$$

în care $I_p^{1-2} = I_p^{3-4} = \dfrac{\pi \cdot 68^4}{32} = 2{,}099 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ şi $I_p^{2-3} = \dfrac{\pi \cdot 82^4}{32} = 4{,}4387 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.

Punând condiția ca $\varphi_{1\text{-}4} = 0$ se obține:

$$-\frac{842{,}65 \cdot 10^3 \cdot l}{2{,}099 \cdot 10^6} + \frac{1825{,}74 \cdot 10^3 \cdot 300}{4{,}4387 \cdot 10^6} + \frac{842{,}65 \cdot 10^3 \cdot 300}{2{,}099 \cdot 10^6} = 0$$

din care rezultă $l = 607$ mm.

P.3.61. Un arbore cu diametrul D = 82 mm transmite mişcarea la un alt arbore prin intermediul unui angrenaj cilindric. Roata dințată este montată pe arbore prin intermediul unei pene paralele ce are dimensiunile precizate în figura 3.110. Ştiind că arborele are o turație n = 200 rot/min şi oțelul din care este confecționat are rezistența admisibilă τ_a = 40 N/mm^2, iar materialul penei τ_a = 60 N/mm^2 să se determine: a) momentul de torsiune capabil al arborelui; *b*) momentul de torsiune maxim pe care pana poate să-l transmită; c) puterea pe care o poate transmite asamblarea.

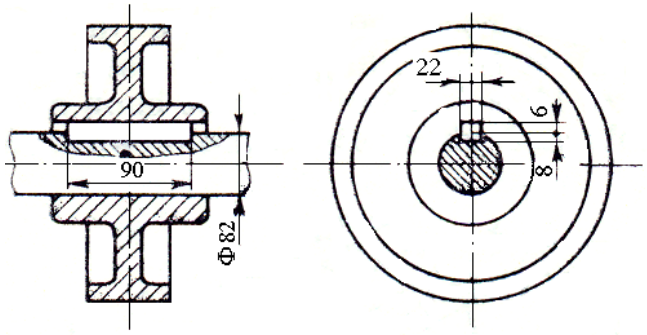


Fig. 3.110.

Dacă se neglijează slăbirea secțiunii arborelui provenită de la canalul de pană atunci arborele poate prelua următorul efort capabil:

$$M_x^{cap} = \tau_a W_p^{ef} = \tau_a \cdot \frac{\pi D^3}{16} = 40 \cdot \frac{\pi \cdot 82^3}{16} = 4{,}33 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 4{,}33 \text{ kNm}. \qquad \text{(a)}$$

Pana este supusă la forfecare şi:

$$T^{cap} = A_f \cdot \tau_a = 22 \cdot 90 \cdot 60 = 118{,}8 \cdot 10^3 \text{ N} = 118{,}8 \text{ kN}.$$

Dacă se reduce această forță în axul arborelui se obține un moment de torsiune egal cu:

$$M_x = T^{cap} \cdot \frac{D}{2} = 118{,}8 \cdot \frac{0{,}082}{2} = 4{,}87 \text{ kNm} \qquad \text{(b)}$$

Pana este solicitată şi la strivire, T^{cap} producând pe suprafața de contact o tensiune normală egală cu:

$$\sigma_{str} = \frac{T^{cap}}{A_{str}} = \frac{118{,}8 \cdot 10^3}{6 \cdot 90} = 220 \text{ N/mm2} < \sigma_a^{str} = 2\sigma_a = 2(2\tau_a) = 4 \cdot 60 = 240 \text{ N/mm}^2.$$

Momentul de torsiune pe care îl poate transmite asamblarea este momentul minim dintre M_x^{cap} calculat cu relația (a) şi M_x calculat cu relația (b): $M_{x,\min} = 4{,}33$ kNm. În consecință puterea pe care o poate transmite asamblarea este:

$$P = \frac{M_{x,\min} \cdot n}{9{,}55 \cdot 10^3} = \frac{4{,}33 \cdot 10^3 \cdot 200}{9{,}55 \cdot 10^3} = 90{,}68 \text{ kW}.$$

P.3.62. Bara din figura 3.111, *a* are secțiunea inelară ($d/D = 0{,}7$). Cunoscând $\mathcal{M} = 2{,}5$ kNm, $\tau_a = 60$ N/mm^2, $G = 8{,}1 \cdot 10^4$ N/mm^2, să se dimensioneze bara şi să se calculeze rotirea secțiunilor *C* şi *E* ($a = 0{,}4$ m)

Se constată că sistemul este static nedeterminat la torsiune, bara *ACEB* fiind încastrată la ambele capete. Se suprimă încastrarea la torsiune din *A* şi se obține forma de bază din figura 3.111, *b*.

Se încarcă forma de bază cu cuplurile $2\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}$ şi se trasează diagrama M_x^0 (fig. 3.111, *c*), apoi se

încarcă forma de bază cu momentul de torsiune necunoscut $M_{x,A}$ şi se trasează diagrama $m_{x,A}$ (fig. 3.111, *d*).

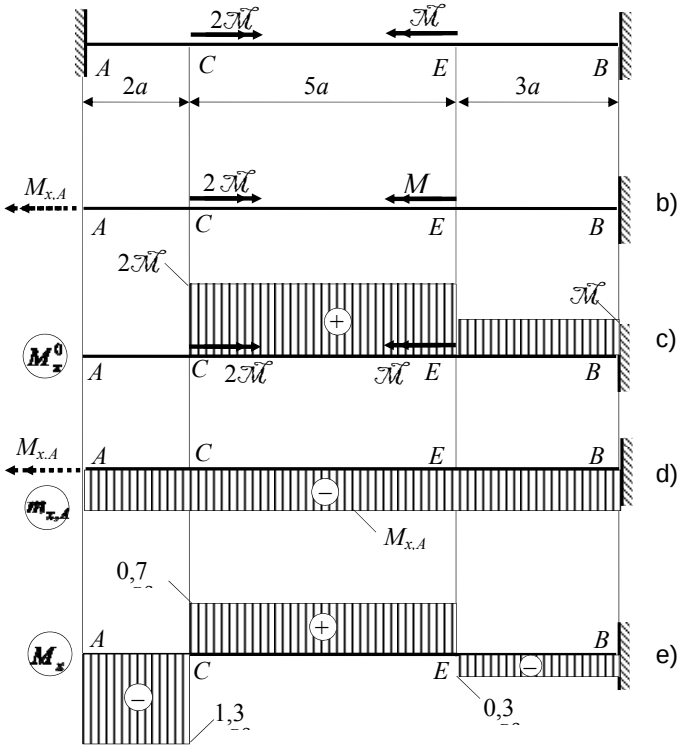


Fig. 3.111.

Sistemul static determinat (forma de bază) din figura 3.111, *b*, solicitat atât de cuplurile exterioare cât şi de momentul axial $M_{x,A}$, trebuie să se comporte identic cu sistemul real din figura 3.111, *a*. În consecinţă:

$$\varphi_A^0 + \varphi'_A = 0, \tag{a}$$

în care:

$$\varphi_A^0 = \varphi_B^0 - \varphi_A^0 = -\int_A^B \frac{M_x^0 \mathrm{d}x}{GI_p} = -\frac{1}{GI_p}(2\mathrm{M} \cdot 5a + \mathrm{M} \cdot 3a) = -\frac{13\mathrm{M}a}{GI_p}, \tag{b}$$

este rotirea la torsiune a secţiunii *A* produsă de cuplurile exterioare ($\varphi_B^0 = 0$, în *B* bara este încastrată);

$$\varphi'_A = \varphi'_B - \varphi'_A = -\int_A^B \frac{m_{x,A}\mathrm{d}x}{GI_p} = \frac{10M_{x,A}a}{GI_p} \tag{c}$$

este rotirea la torsiune a secţiunii *A* produsă de $M_{x,A}$ ($\varphi'_B = 0$, în *B* bara este încastrată).

Se introduce (b) şi (c) în (a) şi se rezolvă ecuaţia obţinută> Rezultă:

$$M_{x,A} = 1{,}3\mathsf{M}\ ,$$

ceea ce dovedeşte că momentul $M_{x,A}$ are sensul ales iniţial.

Cunoscând valoarea reală a momentului din secţiunea A, se încarcă forma de bază cu cuplurile exterioare şi cu $M_{x,A} = 1{,}3\mathcal{M}$ şi se trasează diagrama momentului de torsiune M_x, pe sistemul real.

Momentul maxim are valoarea $M_x^{\max} = -1{,}3\mathsf{M} = -1{,}3 \cdot 2{,}5 = -3{,}25\,\text{kNm}$. Aplicând (3.104) se obţine:

$$W_p^{nec} = \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{\tau_a} = \frac{3{,}25 \cdot 10^6}{60} = 5{,}417 \cdot 10^4 = W_p^{\dim} = \frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right].$$

Având în vedere că $d/D = 0{,}7$, rezultă: $D = 71{,}33$ mm. Se adoptă $D = 72$ mm şi $d = 50$ mm.

Se face verificarea condiţiei de rezistenţă:

$$\tau_{\max}^{ef} = \frac{3{,}25 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 72^3}{16}\left[1 - \left(\frac{50}{72}\right)^4\right]} = 57{,}78\ \text{N/mm}^2 < \tau_a.$$

Cu relaţia (3.111) se determină rotirile:

$$\varphi_C - \varphi_A = -\int_A^C \frac{M_x \mathrm{d}x}{GI_p} = \frac{1{,}3M \cdot 2a}{GI_p} \Rightarrow \varphi_C = \frac{2{,}6Ma}{GI_p} = -4{,}135 \cdot 10^{-3}\ \text{rad},$$

deoarece $\varphi_A = 0$.

$$\varphi_B - \varphi_E = -\int_E^B \frac{M_x \mathrm{d}x}{GI_p} = \frac{0{,}3M \cdot 3a}{GI_p} \Rightarrow \varphi_E = -\frac{0{,}9Ma}{GI_p} = -1{,}431 \cdot 10^{-3}\ \text{rad},$$

deoarece $\varphi_B = 0$.

P.3.63. Să se dimensioneze arcul unei supape de siguranţă (fig. 3.112) şi să se determine săgeata cu care el trebuie montat astfel ca supapa să se deschidă când presiunea fluidului din recipient este $p = 2{,}5$ N/mm^2. Se cunosc: raza de înfăşurare a arcului $R = 30$ mm, numărul de spire $n = 8$, modulul de elasticitate transversal $G = 8{,}3 \cdot 10^4$ N/mm^2, diametrul scaunului supapei $D_s = 40$ mm, rezistenţa admisibila a materialului $\tau_a = 320$ N/mm^2.

Forţa care solicită arcul este:

$$F = p \cdot \frac{\pi D_s^2}{4} = 2{,}5 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2}{4} = 3141{,}59\ \text{N}.$$

Folosind relaţia (3.104) se face o predimensionare a spirei arcului la torsiune:

$$W_p^{nec} = \frac{FR}{\tau_a} = \frac{3141{,}59 \cdot 30}{320} = 294{,}52 = W_p^{\dim} = \frac{\pi d^3}{16} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 294{,}52}{\pi}} = 11{,}44\ \text{mm}.$$

Se adoptă d = 12 mm şi se face verificarea condiţiei de rezistenţă cu relaţia (3.116):

$$\tau_{max} = \frac{3141{,}59 \cdot 30}{\frac{\pi \cdot 12^3}{16}}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{12}{30}\right) = 314{,}8\ \text{N/mm}^2$$

Se constată că $\tau_{max} < \tau_a = 320$ N/mm^2.

Pentru ca supapa să se deschidă la presiunea $p = 2{,}5$ N/mm^2, arcul trebuie să aibă la montaj săgeata:

$$v = \frac{64 \cdot (3141{,}59)(30^3)(8)}{(8{,}3 \cdot 10^4)(12^4)} = 25{,}2\ \text{mm}$$

calculată cu relaţia (3.118).

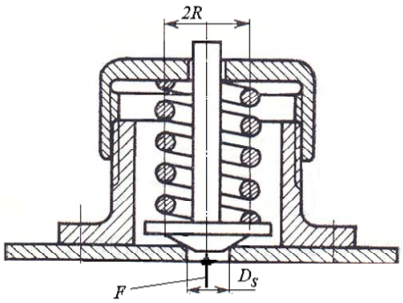


Fig. 3.112.

P.3.64. Grinda *BCDE* din figura 3.113, *a* este nedeformabilă (are rigiditate infinită), iar cele două arcuri au următoarele caracteristici: R_1 = 50 mm, d_1 = 25 mm, n_1 = 11 spire, respectiv R_2 = 60 mm, d_2 = 20 mm, n_2 = 14 spire. Ştiind că cele două arcuri sunt confecţionate din acelaşi material cu τ_a = 300 N/mm^2, $G = 8{,}1 \cdot 10^4$ N/mm^2 să se determine forţa maximă F_{max} pe care sistemul o poate suporta şi condiţiile ce trebuie impuse ca sistemul să fie economic.

Pentru determinarea lui F_{max} este necesar ca mai întâi să se determine forţele F_1, respectiv F_2

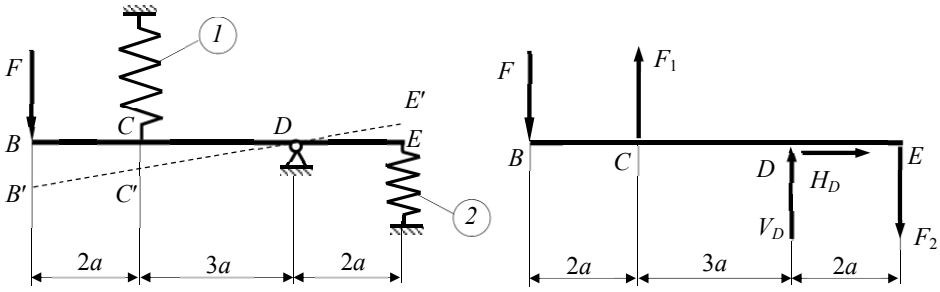


Fig. 3.113.

care solicită cele două arcuri. Pentru aceasta se izolează grinda *BCDE* şi se introduc forţele F_1 şi F_2, precum şi forţele de legătură din articulaţia *D* (fig. 3.113, *b*). Din ecuaţia de moment faţă de punctul *D*, care reprezintă aspectul static al problemei, rezultă:

$$3F_1 + 2F_2 = 5F \qquad \text{(a)}$$

Se constată că sistemul este o dată static nedeterminat (o ecuaţie cu două necunoscute). Din această cauză se apelează la aspectul geometric. Astfel, deoarece bara *BE* are rigiditatea infinită, sub acţiunea forţei *F* şi a celor de legătură, ea se roteşte în jurul articulaţiei *D*. Deoarece deformaţiile sunt mici se poate considera că punctele *B*, *C* şi *E* se deplasează pe verticală (fig. 3.113, *a*).

Din asemănarea triunghiurilor DCC' şi DEE' se deduce:

$$\frac{CC'}{EE'} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{(b).}$$

deoarece $CC' = v_1$, iar $EE' = v_2$.

În baza relației (3.119) $F_1 = k_1 v_1$ şi $F_2 = k_2 v_2$ care introduse în (b) formează împreună cu ecuația (a) sistemul:

$$\begin{cases} 3F_1 + 2F_2 = 5F \\ \dfrac{F_1}{k_1} \cdot \dfrac{k_2}{F_2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

Din rezolvarea acestuia se obține:

$$F_1 = \frac{5F}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}}; \qquad F_2 = \frac{\frac{10}{3}\frac{k_2}{k_1}F}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}}.$$

Deoarece:

$$\frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{20}{25}\right)^4 \cdot \frac{11}{14} \cdot \left(\frac{50}{60}\right)^3 = 0{,}1862$$

rezultă: $F_1 = 1{,}539F$; $F_2 = 0{,}191F$. (d)

Folosind relația (3.115) se determină eforturile capabile pentru cele două arcuri:

$$F_1^{cap} = \frac{\pi \cdot 25^3 \cdot 300}{16 \cdot 50 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\frac{25}{50}\right)} = 15778{,}1\,\text{N}; \quad F_2^{cap} = \frac{\pi \cdot 20^3 \cdot 300}{16 \cdot 60 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\frac{20}{60}\right)} = 7068{,}6\,\text{N}.$$

Din condiția $F_1 \le F_1^{cap} \Leftrightarrow 1{,}539F \le 15778{,}1$ se obține $F' = 10252{,}2$ N, iar din condiția $F_2 \le F_2^{cap} \Leftrightarrow 0{,}191F \le 7068{,}6$ se obține $F'' = 37008{,}4$ N. Forța maximă pe care o poate suporta sistemul analizat este $F_{\max} = \min[F', F''] = 10252$ N.

Dacă sistemul se solicită cu $F_{\max} = 10252$ N în arcul *1* tensiunea maximă va fi $\tau_{\max,\,1} = \tau_a = 300$ N/mm^2, pe când în arcul *2*, $\tau_{\max,\,2} = 83{,}1$ N/mm$^2 \ll \tau_a$. Pentru ca arcurile să fie solicitate la capacitatea lor portantă, arcul *2* se realizează mai scurt cu Δ mm. În felul acesta, la montaj, arcul *1* este solicitat la compresiune de o forță F_1^{mont}, iar arcul doi la întindere de o forță F_2^{mont}. După solicitarea sistemului cu forța F cele două arcuri sunt solicitate de forțele $F_1^* = F_1 - F_1^{mont}$, respectiv $F_2^* = F_2 + F_2^{mont}$. Pentru determinarea lui Δ şi a forței maxime $F_{\max}^*$ se procedează similar, folosind cele trei aspecte ale problemei:

- aspectul static

$$3F_1^* + 2F_2^* = 5F;$$

- aspectul geoemetric

$$\frac{CC'}{EE'} = \frac{3a}{2a} = \frac{v_1^*}{v_2^* - \Delta} \Rightarrow 2v_1^* = 3v_2^* - 3\Delta\,;$$

- aspectul fizic

$$F_1^* = k_1 v_1^*\,;\quad F_3^* = k_2 v_2^*\,.$$

Combinând cele trei aspecte rezultă:

$$F_1^* = \frac{5F}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}} - \frac{2k_2\Delta}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}}\,;\qquad F_2^* = \frac{\frac{10}{3}\frac{k_2}{k_1}F}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}} + \frac{3k_2\Delta}{3 + \frac{4}{3}\frac{k_2}{k_1}}\,.$$

Din condițiile la limită:

$$\begin{cases} F_1^* = F_1^{cap} \\ F_2^* = F_2^{cap} \end{cases}$$

se obține sistemul:

$$\begin{cases} 1{,}539F - 41{,}23\Delta = 15778{,}1 \\ 0{,}191F + 61{,}85\Delta = 7068{,}6 \end{cases}$$

care, prin rezolvare, conduce la: $F_{\max}^*$ =12296,6 N şi Δ = 76,3 mm.

Se constată că, pe lângă faptul că arcurile sunt solicitate la capacitatea lor portantă, sistemul suportă o încărcare mai mare cu 16%.

Probleme suplimentare

P.3.65. Consola din figura 3.114 de secțiune circulară este acționată de două cupluri. Cunoscând forța F = 8 kN, brațul b = 0,4 m, a = 0,5 m, τ_a = 60 N/mm^2, $(d\varphi/dx)_a$ = 0,3 ^{o}/m să se dimensioneze tronsoanele consolei şi să se calculeze rotirile din secțiunile A şi B (G = 8,1·10^4 N/mm^2).

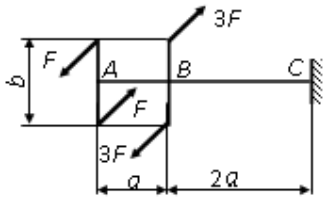


Fig. 3.114.

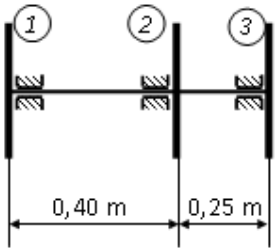


Fig. 3.115.

P.3.66. Roata *2* a arborelui din figura 3.115 primeşte o putere P = 70 kW şi o transmite mai departe astfel, 40% din P prin roata *1* şi 60% din P prin roata *3*. Cunoscând turaţia arborelui n = 240 rot/min, $(d\varphi/dx)_a$ = (1/4) °/m şi τ_a = 60 N/mm^2 să se dimensioneze arborele ştiind că are secţiune inelară (d/D = 0,7) şi să se calculeze rotirea relativă între roţile *1* şi *3* (G = 8,1·10^4 N/mm^2).

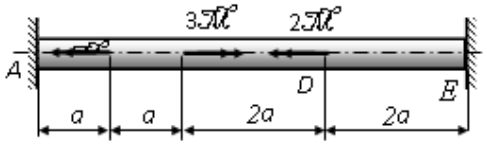


Fig. 3.116.

P.3.67. Bara dublu încastrată din figura 3.116 are secţiune circulară d = 64 mm. Ştiind că a = 0,4 m, $(d\varphi/dx)_a$ = (1/4) °/m şi τ_a = 60 N/mm^2 să se determine valoarea lui $\mathfrak{M}$° (G = 8,1·10^4 N/mm^2).

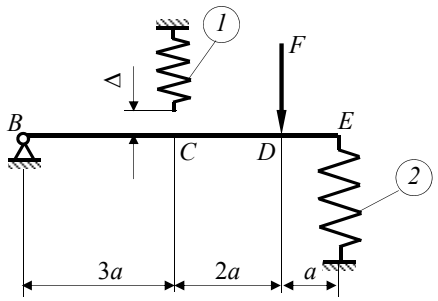


Fig. 3.117.

P.3.68. În sistemul din figura 3.117 bara *BCDE* are rigiditate infinită şi este articulată în *B*. Arcul *1*, la montaj, este mai scurt cu Δ = 35 mm. Ştiind că arcul *1* are R_1 = 40 mm, d_1 = 18 mm, n_1 = 12 spire, iar arcul 2 are R_2 = 60 mm, d_2 = 20 mm, n_2= 10 spire să se determine: a) eforturile în arcuri din montaj; b) rotirea barei *BE* după montaj; c) forţa F_{max} pe care o suportă sistemul după montaj (τ_a = 300 N/mm^2, G = 8,1·10^4 N/mm^2).

4. NOŢIUNI DE TEORIA ELASTICITĂŢII

4.1. ECUAŢIILE DE ECHILIBRU

S-a arătat în capitolul 1.5 că, sub acțiunea forțelor exterioare efectiv aplicate asupra unui corp şi a mişcării acestuia, în interiorul său se dezvoltă o stare de tensiuni care este complet definită dacă se cunosc componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ (vezi relația (1.3)) într-un punct P din interiorul corpului. Aceste tensiuni nu au aceeaşi valoare în fiecare punct decât în cazul unei stări omogene de tensiuni.

Considerând că tensiunile variază de la un punct la altul, atunci, dacă pe una din fețele unui element de volum $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, izolat din corp, de exemplu fața cu normala x, acționează tensiunile σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} (fig. 4.1), pe fața opusă acționează aceleaşi tensiuni plus creşterile respective datorate creşterii lui x cu $\mathrm{d}x$, adică $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$, $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x$, $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x$. În mod analog se stabilesc tensiunile şi pe fețele cu normala y, respectiv z.

Tensiunile dau naştere unor forțe care au direcția tensiunii respective şi mărimea egală cu produsul dintre valoarea tensiunii şi suprafața pe care acționează. Neluând în considerare forțele masice, sistemul de forțe care se dezvoltă pe cele şase fețe ale elementului de volum considerat trebuie să fie în echilibru. Scriind ecuația de proiecție pe axa Px se obține

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\cdot \mathrm{d}y\cdot \mathrm{d}z - \sigma_x \cdot \mathrm{d}y\cdot \mathrm{d}z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}z -$$

$$-\tau_{yx}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}z + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y - \tau_{zx}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y = 0,$$

din care rezultă următoare ecuație diferențială:

Mecanică Teoretică

2. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

2.1. PUNCTUL MATERIAL LIBER

Un punct material este considerat liber atunci când poate ocupa orice poziție în spațiu, nestingherit din punct de vedere geometric de alt corp.

Din punct de vedere matematic coordonatele punctului P, (x, y, z) pot varia independent între ele.

Așadar punctul material liber are trei grade de libertate materializate prin cei trei parametri (coordonatele scalare x, y, z). Poziția punctului material este definită de vectorul de poziție $\bar{r}$:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (2.1)$$

în care $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ reprezintă versorii axelor sistemului de referință $Oxyz$ (fig. 2.1).

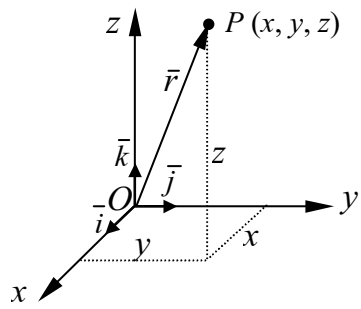


Fig. 2.1.

Se poate observa că în cazul punctului material, forțele care acționează asupra lui sunt, din punct de vedere matematic, vectori legați de acest punct. Rezultă că forțele care acționează asupra punctului material sunt forțe concurente.

2.1.1. Transformarea sistemelor de forţe concurente

Deoarece sistemele de forțe ce acționează asupra unui punct material sunt sisteme de forțe concurente, transformarea lor în sisteme de forțe echivalente simple se face utilizând principiul paralelogramului. În baza acestui principiu, efectul mecanic a două forțe ($\bar{F}_1, \bar{F}_2$) ce acționează asupra unui punct material P este același cu efectul unei singure forțe, egală cu

rezultanta vectorială $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$, a acestora, având mărimea și direcția diagonalei mari a paralelogramului construit cu cele două forțe ca laturi (fig. 2.2). Mărimea forței rezultante se determină cu relația:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\overline{F}_1, \overline{F}_2)}\ , \tag{2.2}$$

iar direcția ei poate fi dedusă din egalitățile:

$$\frac{F_1}{\sin(\overline{R}, \overline{F}_2)} = \frac{F_2}{\sin(\overline{R}, \overline{F}_1)} = \frac{R_1}{\sin(\overline{F}_1, \overline{F}_2)}\ . \tag{2.3}$$

Rezultă că orice sistem de forțe ce acționează asupra unui punct material poate fi transformat, din aproape în aproape, într-o forță echivalentă.

Metoda paralelogramului, extinsă în metoda poligonului forțelor (fig. 2.3), este o metodă greoaie, mai ales în cazul în care sistemele de forțe conțin foarte multe forțe. Din această cauză, pentru calculul rezultantei $\overline{R}$ se utilizează metoda analitică. Astfel:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{i} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} + \overline{j} \sum_{i=1}^{n} F_{iy} + \overline{k} \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\ , \tag{2.4}$$

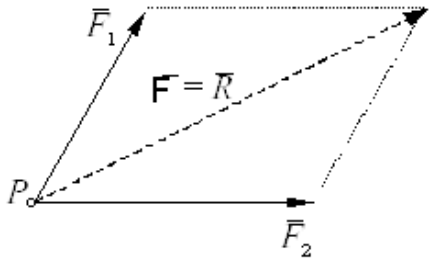


Fig. 2.2.

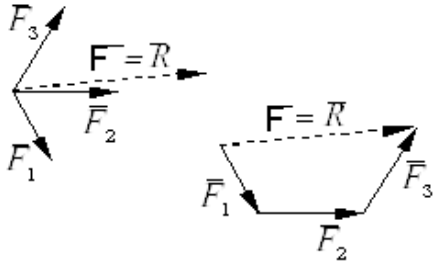


Fig.2.3.

în care F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} reprezintă proiecțiile forței $\overline{F}_i$ pe axele sistemului de referință *Oxyz*, iar *n* numărul forțelor aplicate punctului *P*.

Dacă se notează:

$$\overline{R} = \overline{i}\,X + \overline{j}\,Y + \overline{k}\,Z\ , \tag{2.5}$$

unde X, Y, Z reprezintă proiecțiile vectorului $\overline{R}$ pe axele sistemului de

referință *Oxyz*, atunci componentele vectorului rezultant sunt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \ ; \ Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \ ; \ Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \ . \tag{2.6}$$

În consecință, orice sistem de forțe care acționează asupra unui punct matrerial poate fi înlocuit cu o forță, echivalentă din punct de vedere mecanic, aplicată punctului material, egală cu rezultanta sistemului de forțe:

$$\overline{F} = \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \ . \tag{2.7}$$

Rezultă că două sisteme de forțe $\overline{F}_i$ și $\overline{F}_j$ ($i = 1,2, ..., n$; $j = 1,2, ..., m$), aplicate independent asupra unui punct material, sunt echivalente (au același efect mecanic asupra punctului material) dacă au aceeași rezultantă:

$$\overline{R} = \overline{R}' ; \quad (\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \ ; \ \overline{R}' = \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_j \ ). \tag{2.8}$$

2.1.2. Echilibrul punctului material liber

Punctul material liber este punctul material care poate ocupa orice poziție în soațiu.

Problema echilibrului unui punct material liber, acționat de un sistem de forțe, se rezolvă folosind *principiul inerției* prezentat în paragraful 1.2.

Având în vedere acest principiu, precum și modalitățile de determinare a rezultantei unui sistem de forțe aplicat asupra unui punct material, se poate enunța următorul adevăr: condiția necesară și suficientă ca un punct material liber aflat inițial în repaus față de un sistem de referință dat să rămână în aceeași stare și după ce i se aplică un sistem de forțe (adică să rămână în echilibru sub acțiunea sistemului de forțe dat) este ca rezultanta vectorială a sistemului de forțe să fie nulă. Această condiție se exprimă vectorial astfel:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0, \tag{2.9}$$

iar scalar:

$$X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \; ; \; Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \; ; \; Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \qquad (2.10)$$

Dacă toate forțele ce alcătuiesc sistemul de forțe au suporturile coplanare atunci condiția (2.10) față de un sistem de referință convenabil ales (de exemplu planul *Oxy* să coincidă cu planul forțelor) se reduce la:

$$X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \; ; \; Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \qquad (2.11)$$

Având în vedere faptul că forțele ce acționează asupra punctului material sunt vectori legați, ele depinzând, în general de pozitia punctului material, condițiile scalare (2.10) și (2.11) devin în orice problemă de statica punctului material liber, trei ecuații de proiecție (2.10), respectiv două ecuații de proiecție (2.11), adică devin *ecuații de echilibru*.

Necunoscutele ce intervin în aceste ecuații pot fi de natură geometrică și/sau fizică.

Necunoscutele geometrice sunt cele legate de poziția de echilibru a punctului material față de un sistem de referință (coordonatele punctului material în sistemul de referință ales), cele de natură fizică sunt legate de sistemul de forțe ce acționează asupra punctului material (intensitatea forțelor). Din aceste motive, problema echilibrului punctului material îmbracă diferite forme. Astfel:

a) dacă sistemul de forțe ce acționează asupra punctului material este complet definit, atunci ca necunoscute în ecuațiile (2.8), respectiv (2.9) apar parametrii (coordonatele) ce determină poziția de echilibru a punctului material (*problema directă*);

b) dacă poziția de echilibru a punctului material este cunoscută, se impune determinarea intensității forțelor care acționează asupra lui pentru ca el să rămână în poziția precizată (*problema indirectă*).

c) dacă nu se cunoaște poziția de echilibru și nici sistemul de forțe ce acționează asupra punctului material nu este complet definit atunci problema îmbracă aspectul *mixt*, fiind necesar să se determine atât poziția de echilibru prin parametrii respectivi, cât și o parte din forțe, cele necunoscute.

Se poate constata cu ușurință că problema directă are soluție dacă sistemul de ecuații este compatibil, problema este static determinată; ea nu are soluție când sistemul de ecuații este incompatibil și are o infinitate de soluții când sistemul de ecuații este nedeterminat.

Problema indirectă este, în general, static nedeterminată.

2.2. PUNCTUL MATERIAL LEGAT

Atunci când, din anumite motive, mișcarea unui punct material este stânjenită (restrânsă), el fiind obligat să rămână tot timpul fie pe o suprafață, fie pe o curbă sau într-o anumită poziție în spațiu, spunem că punctul material este supus la legături.

Din punct de vedere geometric punctul material liber are trei grade de libertate (v.par. 1.1). Orice legătură aplicată punctului material îi micșorează numărul gradelor de libertate.

Astfel un punct material obligat să rămână pe o suprafață solidar legată cu reperul de referință are două grade de libertate, deoarece între cei trei parametrii (x, y, z) care determină poziția punctului există o relație dată de ecuația ce definește suprafața în același sistem de referință:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{2.12}$$

Un punct obligat să rămână pe o curbă solidar legată de sistemul de referință are un singur grad de libertate deoarece cei trei parametri (x, y, z) ce definesc poziția punctului material, trebuie să satisfacă cele două ecuații ce definesc curba în sistemul de referință ales:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}. \tag{2.13}$$

Un punct obligat să nu-și schimbe poziția față de sistemul de referință ales nu mai are nici-un grad de libertate.

Din punct de vedere fizic, se observă că orice legătură a unui punct material cu reperul de referință ales se manifestă ca o acțiune din partea acestuia asupra punctului material, denumită reacțiune.

În consecință, pentru studierea echilibrului punctului material legat, se aplică *principiul forțelor de legătură*.

În baza acestui principiu, orice legătură (care impune restricții de natură geometrică punctului material) poate fi înlocuită prin echivalentul ei mecanic – prin forțe.

După eliminarea legăturii și înlocuirii ei cu forțe, numite *forțe de legătură*, punctul material poate fi asimilat unui punct material liber, care însă, rămâne cu restricțiile de natură geometrică impuse de legături.

Fie $\overline{F}_i$ (i =1,2, ..., n) sistemul de forțe efectiv aplicate asupra punctului

material și $\overline{F_j}$ (j =1,2, ..., m) sistemul de forțe de legătură. Condiția de echilibru a punctului material (2.9) devine:

$$\overline{R} + \overline{R} = 0 \tag{2.14}$$

în care $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$ și $\overline{R} = \sum_{j=1}^{m} \overline{F_j}$.

Relația vectorială (2.14) se transpune în trei ecuații scalare. Aceste ecuații se completează cu ecuațiile de natură geometrică (2.12) sau (2.13) în funcție de tipul legăturii pe care o are punctul material.

2.2.1. Punctul material legat de o suprafaţă

În cazul punctului material legat de o suprafață rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$ se descompune într-o forță $\overline{N}$ dirijată după direcția normalei $\overline{n}$ la suprafață în punctul P și în forța $\overline{T}$ ce are suportul cuprins în planul tangent la suprafață în punctul P (fig. 2.4).

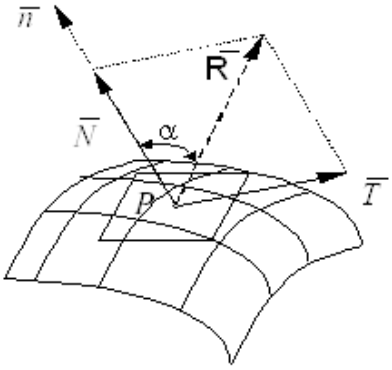


Fig. 2.4.

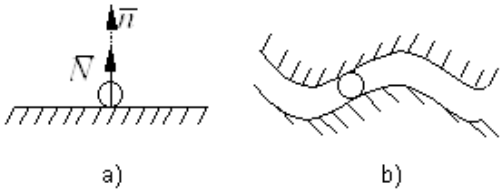


Fig. 2.5.

Forța $\overline{N}$ este numită *forță de legătură normală* sau *reacțiune normală*. Ea are punctul de aplicație în P, suportul dirijat după normala $\overline{n}$ la suprafață în punctul P. Sensul reacțiunii normale $\overline{N}$ este definit în funcție de tipul legăturii pe care o poate avea punctul.

În figura 2.5, *a* este prezentată o legătură *unilaterală* a punctului P. În acest caz forța de legătură normala $\overline{N}$ are sensul bine definit, determinat de sensul posibilității de mișcare a punctului P după direcția normalei $\overline{n}$ la

suprafață. În cazul legăturii *bilaterale*, figura 2.5, *b*, sensul lui $\overline{N}$ se alege apriori, urmând ca acesta să rezulte din calcul (prin semnul mărimii scalare a intensității reacțiunii normale $\overline{N}$).

Mărimea reacțiunii $\overline{N}$ poate lua orice valoare în mod teoretic ($N \geq 0$ în cazul legăturii unilaterale, $N \geq 0$ sau $N \leq 0$ în cazul legăturii bilaterale), deoarece în mecanica teoretică corpurile sunt considerate rigide perfecte.

Forța $\overline{T}$, denumită *forță de legătură tangențială* sau *forță de frecare*, este generată de rezistența la alunecare a punctului pe suprafața de sprijin, rezistență cauzată de frecare. Are punctul de aplicație este în *P*, direcția cuprinsă în planul tangent la suprafață în punctul *P* și sensul invers tendinței de mișcare a punctului *P* pe suprafață.

Experimental s-a constata că mărimea forței de frecare $\overline{T}$ nu poate depăși o valoare limită T^l:

$$T \leq T^l. \tag{2.15}$$

Tot experimental s-a constatat că:

$$T^l = \mu N. \tag{2.16}$$

În relația (2.16) factorul de proporționalitate μ este un coeficient adimensional, denumit coeficient de frecare la alunecare.

Coulomb a constatat experimental că acest coeficient μ depinde de:

– natura corpurilor în zona de contact;

– gradul de prelucrare a suprafețelor corpurilor în zona de contact;

– existența sau lipsa unui material interpus între cele două corpuri;

și nu depinde de:

– mărimea suprafețelor de contact;

– viteza relativă a corpurilor.

Aceste observații sunt cunoscute sub denumirea de *legile lui Coulomb*. Ele au fost însă criticate, în special independența coeficientului μ de mărimea forței de legătură normale și de viteza relativă a celor două corpuri care alunecă unul față de celălalt.

Cercetări ulterioare au demonstrat că pentru valori foarte mari ale reacțiunii normale $\overline{N}$, μ nu mai este constant ci crește foarte lent cu *N*. De asemenea, Galton a demonstrat că μ depinde de viteza relativă a celor două corpuri, valoarea lui scăzând sensibil cu creșterea vitezei relative. În această situație coeficientul de frecare corespunzător vitezei $v = 0$ se numește *coeficient de aderență*.

Coeficentul de frecare μ mai depinde de temperatura corpurilor în

contact și de timpul cât au stat corpurile în contact.

Cu toate acestea, legile frecării rămân valabile în cadrul valorilor pe care le-a experimentat Coulomb.

Coeficientul de frecare μ se determină experimental cu ajutorul unui aparat numit *tribometru*. Un exemplu de tribometru este reprezentat de un plan înclinat ce poate să-și modifice ungiul de înclinare α (fig. 2.6).

Se constată că pentru valori ale unghiului α cuprinse între 0 și o valoare limită, punctul material rămâne în repaus. Acesta se explică prin faptul că rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$ face echilibrul greutății $\overline{G}$.

Fie φ valoarea unghiului α la care mișcarea punctului material începe să se producă. Deci pentru $\alpha \leq \varphi$ punctul material rămâne în repaus, iar pentru $\alpha > \varphi$ punctul material începe să lunece.

Se poate constata că:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{T}{N} \tag{2.17}$$

și dacă avem în vedere relația (2.16) rezultă:

$$\mathrm{tg}\varphi = \mu. \tag{2.15}$$

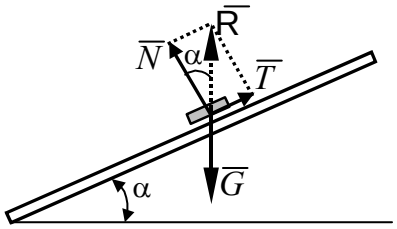


Fig. 2.6.

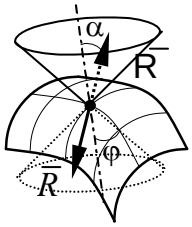


Fig. 2.7.

Din cele prezentate se observă că în cazul punctului material legat de o suprafață, condiția de echilibru este îndeplinită dacă rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$ face echilibrul rezultantei forțelor efectiv aplicate $\overline{R}$. Dacă se ține seama de relația (2.18), pentru ca echilibrul unui punct material să subziste, într-o anumită poziție pe o suprafață, trebuie ca direcția rezultantei forțelor active $\overline{R}$ să fie cuprinsă în interiorul unui con circular drept, denumit *con de frecare*, cu axa de simetrie după direcție normalei la

suprafață în poziția de echilibru și cu unghiul la vârf egal cu 2φ (fig. 2.7). Situația limită corespunde cazului când rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{R}$ are direcția unei generatoare a conului (α = φ).

Deoarece pe lângă *necunoscutele principale ale problemei*, parametrii *x, y, z* ai poziției de echilibru, apar și *necunoscute secundare* – una este mărimea scalară a reacțiunii normale $\overline{N}$ și două sunt: direcția și mărimea forței de frecare $\overline{T}$ (în cazul general în spațiu), ecuațiile de echilibru ale punctului material *P* legat de o suprafață se scriu astfel:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} + \overline{N} + \overline{T} = 0 & \text{(conditia statică)} \\ f(x, y, z) = 0 & \text{(conditia geometrică)} \\ T \le \mu N & \text{(conditia fizică)} \end{cases} \tag{2.19}$$

În acest caz problema are aspect mixt: se caută poziția de echilibru, precum și intensitatea forțelor de legătură.

Exprimarea analitică a condiției fizice de echilibru. Considerațiile geometrice făcute anterior permit să se exprime condițiile de echilibru cu frecare într-o formă foarte generală.

Fie ecuația suprafeței dată de relația (2.12). Se știe că gradientul unei forțe:

$$\nabla f = \text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k} \tag{2.20}$$

reprezintă un vector care are direcția normalei $\overline{n}$ la suprafață. La echilibru, unghiul dintre acest vector și rezultatnta forțelor efectiv aplicate $\overline{R} = \bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z$, trebuie să fie mai mic decât unghiul φ al conului de frecare.

Din produsul scalar al celor doi vectori:

$$\overline{R} \cdot \nabla f = |\overline{R}||\nabla f|\cos\alpha \tag{2.21}$$

rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{R} \cdot \nabla f}{|\overline{R}||\nabla f|} \tag{2.21'}$$

sau în funcție de proiecțiile pe axe ale celor doi vectori:

$$\cos\alpha = \frac{X\dfrac{\partial f}{\partial x} + Y\dfrac{\partial f}{\partial y} + Z\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \tag{2.22}$$

Dacă măsura unghiului dintre vectorul rezultant $\overline{R}$ și normala la suprafață, măs$\angle(\overline{R}, \nabla f) < \pi/2 \Rightarrow \cos\alpha > 0$, iar dacă măs$\angle(\overline{R}, \nabla f) > \pi/2$ $\Rightarrow \cos\alpha < 0$.

Din această cauză, în continuare vom considera $|\cos\alpha|$ a cărui valoare este:

$$|\cos\alpha| = \frac{\left|X\dfrac{\partial f}{\partial x} + Y\dfrac{\partial f}{\partial y} + Z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Pentru echilibru trebuie ca $\alpha \le \varphi$ şi deci $|\cos\alpha| \ge \cos\varphi$. Având în vedere că $\mathrm{tg}\varphi = \mu \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, condiția de echilibru se scrie:

$$\frac{\left|X\dfrac{\partial f}{\partial x} + Y\dfrac{\partial f}{\partial y} + Z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{2.23}$$

Legături ideale sunt legăturile pentru care se neglijează frecările, și deci $\overline{T} = 0$, situație în care suprafața de care este legat punctul material se numește suprafață *lucie*. În acest situație, din prima ecuație (2.19) rezultă:

$$\overline{R} + \overline{N} = 0 \tag{2.24}$$

și cum se poate scrie:

$$\overline{N} = \lambda \nabla f = \lambda \,\mathrm{grad}\, f, \tag{2.25}$$

relația (2.24) devine:

$$\overline{R} + \lambda \nabla f = 0. \qquad (2.24')$$

Această ecuație vectorială, proiectată pe axele sistemului de referință ales, conduce la următoarele ecuații de echilibru scalare:

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad (2.26)$$

care conțin patru necunoscute: coordonapele punctului pentru poziția de echilibru x, y, z și parametrul λ. Pentru rezolvarea sistemului format din cele trei ecuații scalare (2.26) se utilizează și ecuația (2.12).

2.2.2. Punctul material legat de o curbă

În cazul punctului material legat de o curbă rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$ poate fi descompusă astfel (fig. 2.8): o forță $\overline{N}$ (*forța de*

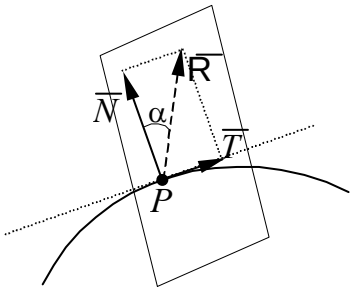


Fig. 2.8.

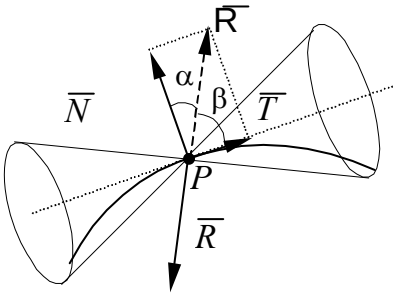


Fig. 2.9.

legătură normală sau reacțiunea normală) dirijată după direcția normalei la curbă în punctul P și forța $\overline{T}$ (*forța de frecare de alunecare*) dirijată după direcția tangentei la curbă în punctul P.

Observațiile cu privire la aceste forțe făcute în cazul punctului material legat de o suprafață sunt, în general, valabile și în acest caz, cu deosebirile următoare:

a) reacțiunea normală $\overline{N}$ poate avea orice direcție în planul normal la curbă în punctul P;

b) forța de frecare de alunecare $\overline{T}$ are direcția tangentei la curbă în punctul P și sensul opus sensului de mișcare sau tendinței de mișcare. Dacă din datele problemei nu rezultă sensul de mișcare, atunci se adoptă un sens arbitrar, iar pentru sensul contrar este suficient ca în rezultatele finale să se schimbe semnul coeficientului de frecare de lunecare μ.

În baza aceloraşi consideraţii geometrice asupra forţelor $\overline{N}$ şi $\overline{T}$ se poate scrie (fig. 2.8): $N = \mathscr{R}\cos\alpha$; $T = \mathscr{R}\sin\alpha$, de unde rezultă $T = N\mathrm{tg}\alpha$.

În situaţia limită, când frecarea nu mai poate genera o reacţiune tangenţială care să păstreze echilibrul punctului material, unghiul α atinge valoarea limită egală cu valoarea unghiului de frecare φ: $T^l = N\mathrm{tg}\varphi$. Pentru echilibru trebuie îndeplinită condiţia (2.15) care conduce la $\alpha \le \varphi$, dar, în acest caz unghiul α se măsoară faţă de o direcţie oarecare cuprinsă în planul normal la curbă în punctul P. Din această cauză se consideră complementul acestuia $\beta = \pi/2 - \alpha$, iar condiţia $\alpha \le \varphi$ capătă forma: $\pi/2 - \beta \le \varphi \Rightarrow \beta \ge \pi/2 - \varphi$ (fig. 2.9).

Rezultă că un punct material poate rămâne în echilibru pe o curbă, într-o anumită poziţie dacă direcţia rezultantei forţelor efectiv aplicate asupra punctului material $\overline{R}$ în poziţia de echilibru se găseşte în afara unui con circular drept ce are axa de simetrie identică cu tangenta la curbă în punctul P, semiunghiul la vârf $\beta = \pi/2 - \varphi$ şi care este denumit *con de frecare*.

În această situaţie condiţiile de echilibru ale punctului material legat de o curbă aspră se exprimă sub forma:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} + \overline{N} + \overline{T} = 0 & \text{(conditia statică)} \\ \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} & \text{(conditiile geometrice)} \\ T \le \mu N & \text{(conditia fizică)} \end{cases} \tag{2.27}$$

În sistemul de ecuaţii (2.27) apar 6 necunoscute: parametrii x, y, z ce determină poziţia de echilibru; mărimea scalară şi direcţia reacţiunii normale $\overline{N}$; mărimea scalară a forţei de frecare $\overline{T}$. Pentru determinarea acestor necunoscute avem la dispoziţie: 3 ecuaţii scalare obţinute din condiţia de natură statică (2.27), 2 ecuaţii de natură geometrică şi o ecuaţie, la limită, obţinută din condiţia de natură fizică. Rezultă că problema echilibrului punctului material legat de curbă poate fi rezolvată.

Exprimarea analitică a condiţiei fizice de echilibru. O curbă poate fi exprimată prin ecuaţiile parametrice:

$$x = x(t);\ \ y = y(t);\ \ z = z(t). \tag{2.28}$$

Vectorul $\overline{v}$ dirijat în lungul tangentei la curbă în punctul P are expresia:

$$\overline{v} = \dot{x}\,\overline{i} + \dot{y}\,\overline{j} + \dot{z}\,\overline{k}$$

în care $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ reprezintă prima derivată în raport cu parametrul t a relațiilor (2.28) (mai târziu, în cadrul capitolului de cinematica punctului, se va constata ca vectorul $\overline{v}$ poartă numele de viteză, iar parametrul t reprezintă timpul).

Având în vedere notația (2.5) se poate scrie:

$$\cos\beta = \frac{\overline{R}\cdot\overline{v}}{|\overline{R}||\overline{v}|} = \frac{\dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{2.29}$$

Deoarece, pentru echilibru $\beta \geq \pi/2 - \varphi$, adică $|\cos\beta| \leq \sin\varphi$ condiția de echilibru este:

$$\frac{|\dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{2.30}$$

Aplicații

A.2.1. Se consideră un punct material de greutate P, acționat printr-un fir care are la capete greutățile G și Q (fig. 2.10, *a*). Să se determine pozitia de echilibru, precizată de unghiurile α și β.

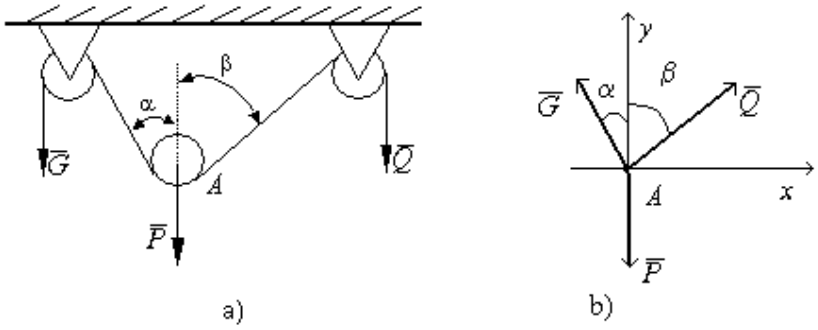


Fig.2.10.

Asupra punctului material acționează forțele precizate în figura 2.10, *b*. Deoarece cele teri forțe care acționează asupra punctului material formează un sistem de forțe coplanar, se pot scrie două ecuații de echilibru: ecuație de proiecție pe orizontală,

$$Q\sin\beta - G\sin\alpha = 0,$$

și ecuație de proiecție pe verticală,

$$Q\cos\beta - G\cos\alpha - P = 0.$$

Din cele două ecuații: $\sin\beta = \frac{G}{Q}\sin\alpha$; $\cos\beta = \frac{P - G\cos\alpha}{Q}$.

Înlocuind expresiile de mai sus în sistemul ecuațiilor de echilibru se obțin relațiile:

$$\frac{G^2}{Q^2}\sin^2\alpha + \frac{P^2 - 2PG\cos\alpha + G^2\cos^2\alpha}{Q^2} = 1.$$

$$G^2 + P^2 - 2PG\cos\alpha = Q^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{G^2 + P^2 - Q^2}{2PG}$$

$$\cos\beta = \frac{P}{Q} - \frac{G}{Q}\cdot\frac{G^2 + P^2 - Q^2}{2PG} \Rightarrow \cos\beta = \frac{P^2 + Q^2 - G^2}{2PQ}.$$

Deoarece funcția trigonometrică a unghiului γ trebuie să îndeplinească condiția $-1 \le \cos\gamma \le 1$, pentru ca soluțiile prezentate să aibă sens este necesar şi suficient ca:

$$-1 \le \frac{G^2 + P^2 - Q^2}{2PG} \le 1,\ -1 \le \frac{P^2 + Q^2 - G^2}{2PQ} \le 1.$$

Inegalitățile se mai pot scrie astfel:

$$|P - G| \le Q \le |P + G|;\ |P - Q| \le G \le |P + Q|$$

A.2.2. Un punct material greu de masă *m*, este așezat pe suprafața interioară aspră a unei calote sferice de rază *R*; coeficientul de frecare dintre punctul material și suprafața sferică este μ. Se cere să se studieze echilibrul punctului material indicându-se condițiile de echilibru.

Datorită frecării, punctul material poate rămâne în echilibru și în altă poziție decât cea evidentă, din punctul cel mai de jos al calotei sferice (poziția de echilibru stabil) (fig. 2.11, *a*).

a) Pentru a determina pozițiile în care punctul material rămâne în repaus, presupunem că punctul material se află într-o poziție oarecare definită de coordonatele: R, α, γ.

Asupra punctului material acționează forța efectiv aplicată $m\,\overline{g}$ și forțele de legătură: $\overline{N}$ – reacțiunea normală (al cărui sens este dat de caracterul unilateral al legăturii) și $\overline{T}$ – forța de frecare (după o direcție oarecare conținută în planul tangent la sferă în punctul *P*).

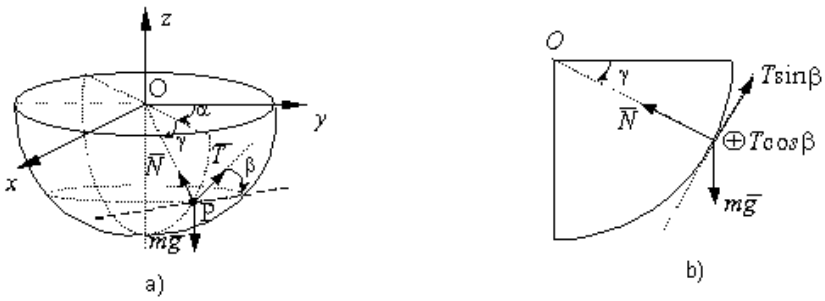


Fig. 2.11.

Din condiția vectorială de echilibru:

$$m\overline{g} + \overline{N} + \overline{T} = 0 \qquad \text{(a)}$$

se obțin ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{cases} mg\sin\gamma - N = 0 \\ mg\cos\gamma - T\sin\beta = 0 \\ T\cos\beta = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

care conțin 4 necunoscute: necunoscutele geometrice γ și β și necunoscutele fizice N și T (mărimile lor scalare). Deoarece numărul necunoscutelor depășește numărul ecuațiilor (b), este necesar o ecuație suplimentară.

O ecuație suplimentară poate fi dată dată de restricția de natură geometrică, impusă de legătură (punctul material nu poate părăsi suprafața interioară a sferei): $r = R$. Dar, această condiție a fost utilizată, implicit, atunci când unghiul dintre direcția forței de greutate $m\overline{g}$ și tangenta la meridian în punctul P a fost egal cu γ (fig. 2.11).

O a doua ecuație suplimentară se obține din condiția fizică considerată la limită:

$$T = \mu N. \qquad \text{(c)}$$

Deoarece T nu poate avea mărimea scalară egală cu zero, din ultima ecuație (b) rezultă $\cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = \pi/2$. După eliminarea necunoscutelor secundare N și T rezultă :

$$\mathrm{tg}\gamma_0 = 1/\mu$$

și deci:

$$\gamma_0 = \mathrm{arctg}(1/\mu).$$

Poziția de echilibru stabil fiind dată de valoarea $\gamma = \pi/2$, rezultă că, pentru echilibru $\gamma \in [\gamma_0 ; \pi/2]$. Deoarece poziția de echilibru nu depinde de unghiul α, punctul material rămâne în repaus pe calota sferică mărginită de cercul de rază $r_c = R\cos\gamma_0 = \dfrac{R\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Valoarea forțelor de legătură, la limită, este:

$$N = mg\sin\gamma_0 = mg\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}; \qquad T = mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

b) Pentru determinarea poziției de echilibru se poate folosi realția (2.21) în care, pentru situația considerată, rezultanta forțelor efectiv aplicate este: $\overline{R} = -mg\,\overline{k}$.

Cum ecuația suprafeței sferice față de sistemul de axe considerat (fig.2.11) este $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, versorul normalei la suprafața sferică în punctul P este $\overline{n} = 2x\,\overline{i} + 2y\,\overline{j} + 2z\,\overline{k}$. Înlocuind în ecuația (2.21) rezultă:

$$\frac{\left|-mg\cdot 2z\right|}{\left|G\right|\cdot 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

care conduce la relația: $\left|z\right| \geq \dfrac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$, adică: $z \leq -\dfrac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Deoarece $z = -R\sin\gamma$, prin prelucrarea inegalității anteriaore se obține poziția de echilibru: $\gamma_0 = \mathrm{arctg}\,(1/\mu)$.

A.2.3. O bilă grea de masă m poate culisa pe o sârmă aspră (coeficient de frecare μ) îndoită sub forma unui arc de parabolă $y = x^2/2p$ cu axa verticală (fig. 2.12). Se cere să se determine pozițiile în care bila rămâne în repaus pe sârmă.

Pentru reprezentarea forțelor de legătură trebuie avut în vedere următoarele aspecte:

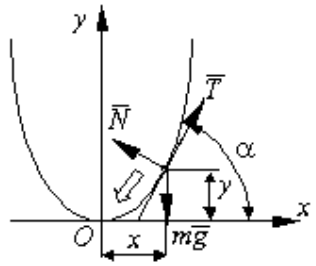


Fig. 2.12.

– bila sub acțiunea forței efectiv aplicate $m\,\overline{g}$ nu poate aluneca decât în jos din care cauză forța de lunecare $\overline{T}$ are sensul indicat în figura 2.12;

– deoarece foarța efectiv aplicată $m\,\overline{g}$ și forța de frecare $\overline{T}$ sunt cuprinse în planul xOy, forța $\overline{N}$ nu poate avea decât o singură componentă cea cuprinsă în planul vertical ce conține arcul de parabolă, iar sensul cel din figura 2.12.

Proiectând ecuația vectorială de echilibru:

$$m\,\overline{g} + \overline{N} + \overline{T} = 0 \qquad \text{(a)}$$

pe direcția normalei și pe direcția tangentei la curbă se obține:

$$N - mg\cos\alpha = 0 \;;\; T - mg\sin\alpha = 0. \qquad \text{(b)}$$

Restricția geometrică este dată de ecuația parabolei: $y = x^2/2p$.

Se poate observa că parametrii x și y ai poziției de echilibru nu sunt expliciți în relațiile de natură statică (b). Ei pot fi însă explicitați deoarece:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{p} = \mathrm{tg}\alpha \qquad \text{(c).}$$

În baza acestei relații se pot elimina necunoscutele N și T din relațiile (b) și se pot înlocui în relația de natură fizică pentru situația limită: $T = \mu N$. Se obțin valorile parametrilor corespunzătoare poziției de echilibru:

$$x_0 = \mu p; \quad y_0 = \mu^2 p/2. \qquad \text{(d)}$$

Pe arcul din stânga al parabolei, deoarece sensul forței de frecare $\overline{T}$ se schimbă față de axa Ox condiția de echilibru (d) devine:

$$x_0 = -\,\mu p; \quad y_0 = \mu^2 p/2. \text{ (e)}$$

Teste

T.2.1. Dacă un punct material legat de o curbă aspră are rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{R}$ situată în interiorul conului frecării atunci:

a) punctul material se află în echilibru;
b) punctul material este în repaus;
c) punctul material se află în echilibru la limită;
d) punctul material nu se află în echilibru.

T.2.2. Dacă un punct material legat de o suprafață aspră are rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{R}$ situată în interiorul conului frecării atunci:

a) punctul material se află în echilibru;
b) punctul material este în repaus;
c) punctul material se află în echilibru la limită;
d) punctul material nu se află în echilibru.

T.2.3. Un punct material obligat să rămână tot timpul în contact cu o curbă strâmbă are:

a) trei grade de libertate;
b) două grade de libertate;
c) un grad de libertate;
d) nici un grad de libertate.

T.2.4. Un punct material obligat să rămână în permanență în contact cu o suprafață are:

a) trei grade de libertate;
b) două grade de libertate;
c) un grad de libertate;
d) nici un grad de libertate.

T.2.5. În cazul unui punct material legat de o suprafață aspră forțele efectiv aplicate și forțele de legătură pot alcătui:

a) un sistem de forțe oarecare;
b) un sistem de forțe concurente;
c) un sistem de forțe coplanare;
d) un sistem de forțe paralele.

T.2.6. Dacă asupra unui punct material *P* acționează următoarele forțe: $\overline{F}_1 = 3\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}$; $\overline{F}_2 = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$; $\overline{F}_3 = -2\overline{i} + 3\overline{j} - 6\overline{k}$; $\overline{F}_4 = 2\overline{k}$; $\overline{F}_5 = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$ atunci:

a) $\overline{R} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ și punctul material *P* este în echilibru;

b) $\overline{R} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ și punctul material *P* nu este în echilibru;

c) $\overline{R} = 0$ și punctul material *P* este în echilibru;

d) $\overline{R} \neq 0$ și punctul material *P* nu este în echilibru.

T.2.7. Pentru ca punctul material *P* de masă *m* situat pe un plan înclinat aspru (coeficient de frecare μ), cu linia de cea mai mare pantă ce face ungiul α cu orizontala, și acționat de forță orizontală $\overline{F}$ (fig. 2.13) să rămână în echilibru trebuie ca:

$$a)\, mg\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\mathrm{tg}\alpha} \le F \le mg\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha};\; b)\; mg\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha} \le F \le mg\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\mathrm{tg}\alpha};$$

$$c)\; mg\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\mathrm{tg}\alpha} \ge F \ge mg\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha};\quad d)\; mg\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha} \ge F \ge mg\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\mathrm{tg}\alpha}.$$

T.2.8. Un punct material *M* de greutate neglijabilă se află pe un inel semicircular luciu și este acționat de forțele *F* și *Q* așa cum se arată în figura 2.14. Atunci când punctul *M* se află în echilibru:

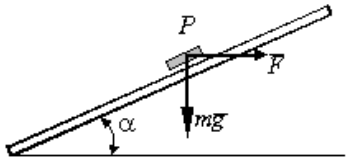


Fig. 2.13

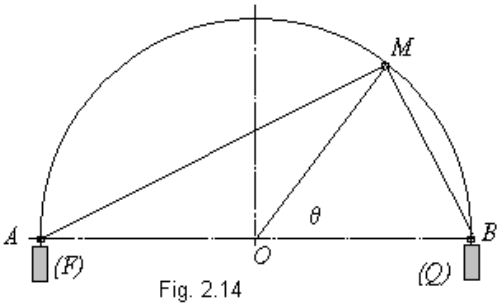


Fig. 2.14

$$a)\; \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{F}{Q};\qquad b)\; \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{Q}{F};$$

$$c)\; \mathrm{tg}\theta = \frac{F}{Q};\qquad d)\; \mathrm{tg}\theta = \frac{Q}{F}.$$

T.2.9. Pentru cazul punctului material precizat la punctul 8 valoarea forței de legătură normale în poziția de echilibru este:

$$a)\; N = \sqrt{P^2+2Q^2};\qquad b)\; N = \sqrt{P^2-Q^2};$$

$$c)\; N = \sqrt{P^2-2Q^2};\qquad d)\; N = \sqrt{P^2+Q^2}.$$

T.2.10. Conform legilor lui Coulomb, coeficientul de frecare de alunecare μ :

a) depinde de natura corpurilor în zona de contact;

b) depinde de gradul de prelucrare al suprafețelor corpurilor în zona de

contact;
c) nu depinde de mărimea suprafețelor în contact;
d) nu depinde de viteza relativă a corpurilor aflate în contact.

T.2.11. Valoarea maximă a forței de frecare de alunecare este:
a) $T > \mu N$;
b) $T = \mu N$;
c) $T < \mu N$;
d) $T \neq \mu N$.

T.2.12. Forțele aplicate unui punct material sunt:
a) vectori liberi;
b) vectori alunecători;
c) vectori legați;
d) vectori paraleli.

3. STATICA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE

Prin sistem de puncte materiale se înțelege o mulțime de puncte materiale (discrete sau continue) a căror mișcare, față de un sistem de referință oarecare, se studiază împreună, din anumite motive, neesențiale.

3.1. FORŢE APLICATE UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

În cadrul forțelor aplicate unui sistem de puncte materiale se pot distinge două tipuri de forțe: forțe exterioare și forțe interioare.

a) **Forțe exterioare** sunt acele forțe care reprezintă acțiunea unor corpuri din afara sistemului asupra diferitelor puncte materiale din sistem. Ele sunt notate $\overline{F}_i^{ext}$ (i = 1, 2, ..., n) unde n reprezentând numărul de puncte materiale ce alcătuiesc sistemul. Forțele exterioare pot fi: *forțe exterioare efectiv aplicate* $\overline{F}_{is,a}^{ext}$ și *forțe exterioare de legătură* $\overline{F}_{ik,l}^{ext}$ care, în baza principiului legături-lor, sunt introduse prin ruperea legăturilor de natură geometrică pe care punctele le au cu sistemul de repere. Indicii s și k identifică numărul forțelor efectiv aplicate, respectiv de legătură, care acționează asupra punctului material i. Evident:

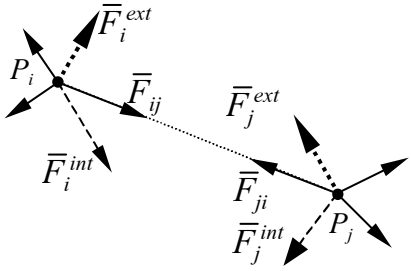


Fig. 3.1

$$\overline{F}_i^{ext} = \sum_s \overline{F}_{is,a}^{ext} + \sum_k \overline{F}_{ik,l}^{ext} ; \qquad (3.1)$$

b) **Forțe interioare**. Ele reprezintă interacțiunile dintre diferitele puncte materiale ce alcătuiesc sistemul. Sunt notate: $\overline{F}_{ij}$, $\overline{F}_{ji}$ (i, j=1,2,...,n; $i \neq j$) (fig. 3.1).

Rezultanta acțiunilor diferitelor puncte P_j din sistem asupra punctului P_i se determină astfel:

$$\overline{F}_i^{int} = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij} \; ; \quad (i \neq j) \qquad (3.2)$$

În baza principiului egalității acțiunii cu reacțiunea, forțele $\overline{F}_{ij}$ și $\overline{F}_{ji}$ sunt egale în modul două câte două, se manifestă pe aceeași direcție și sunt de sensuri contrare.

Forțele interioare $\overline{F}_{ij}$ se pot manifesta la distanță, ca *forțe interioare efectiv aplicate* $\overline{F}_{ij}^{a}$ (de atracție sau de respingere) sau prin contact, ca *forțe interioare de legătură* $\overline{F}_{ij}^{l}$.

Se identifică:

– rezultanta forțelor interioare efectiv aplicate asupra punctului P_i:

$$\overline{F}_{i,a}^{int} = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}^{a} \; ; \quad (i \neq j) \qquad (3.3)$$

– rezultanta forțelor interioare de legătură asupra punctului P_i:

$$\overline{F}_{i,l}^{int} = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}^{l} \; ; \quad (i \neq j). \qquad (3.4)$$

Rezultă că acțiunea celorlalte puncte materiale ce alcătuiesc sistemul asupra punctului P_i este:

$$\overline{F}_i^{int} = \overline{F}_{i,a}^{int} + \overline{F}_{i,l}^{int} = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}^{a} + \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{ij}^{l} \; ; \quad (i \neq j). \qquad (3.5)$$

Forțele interioare efectiv aplicate pun în evidență influența reciprocă a punctelor materiale asupra mișcării lor. Această influență se face fără să se reducă numărul gradelor de libertate de mișcare a punctelor. În schimb, forțele interioare de legătură arată că libertatea de mișcare a punctului P_i față de P_j (și reciproc) este împiedicată pe direcția $\overline{P_i P_j}$.

Forețele interioare formează sisteme de forțe în echilibru deoarece, după cum s-a mai sublinat, ele sunt două câte două egale și direct opuse. Cu toate acestea forțele interioare nu pot fi neglijate, deoarece, după cum se va arăta mai departe, lucrul mecanic al acestor forțe este diferit de zero, cu excepția cazului sistemelor perfect rigide.

3.2. ECHILIBRUL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE ACŢIONAT DE FORTE

Fie un sistem de n puncte materiale acționat de forțe exterioare și ale cărui puncte (unele sau chiar toate) au legături de natură geometrică cu corpurile sistemului de referință. Echilibrul acestui sistem este realizat atunci când el se află în repaos față de un sistem de referință. Deoarece acest lucru implică repaosul fiecărui punct material în parte față de sistemul de referință considerat rezultă că, pentru studiul echilibrului sistemului de puncte materiale este necesar izolarea și studierea fiecărui punct material sub acțiunea forțelor exterioare și a forțelor interioare ce îi revin.

Condiția necesară și suficientă pentru existența echilibrului unui punct material i din cadrul sistemului de n puncte materiale, este:

$$\overline{F}_i^{ext} + \overline{F}_i^{\text{int}} = 0, \tag{3.6}$$

în care $\overline{F}_i^{ext}$ se calculează cu relația (3.1), iar $\overline{F}_i^{\text{int}}$ cu relația (3.5).

Se obțin astfel n ecuații vectoriale ce se transpun în $3n$ relații scalare, care vor constitui ecuațiile de echilibru ale sistemului de puncte materiale. Aceste ecuații de echilibru scalare vor fi completate cu ecuațiile furnizate de aspectele geometric și fizic.

3.3. FIRUL

Foarte mulți autori consideră firele ca fiind corpuri care, din punct de vedere geometric, au două dimensiuni neglijabile și care sunt perfect flexibile și torsionabile, ele neputând prelua eforturi de încovoiere și de răsucire.

Firul poate fi modelat însă și ca un sistem continuu format din puncte

materiale infinit apropiate de mase neglijabile dispuse geometric în "lanț" și legate, două câte două, rigid între ele. În acest fel firul reprezintă un sistem de puncte materiale a căror dispunere mutuală fizico-geometrică este analogă, în sensul că trecerea de la un punct la altul se poate face în mod continuu (adică din punct de vedere matematic, această trecere poate fi descrisă prin variațuia unei funcții continue de coordonatele curente ale punctului). În această situație este suficientă studierea echilibrului unui punct și extinderea rezultatelor la celelalte puncte, printr-un calcul integral (sau cu diferențe finite), constantele de integrare urmând a se determina din condiții extreme, adică aplicând relațiile obținute punctelor de la limita geometrică a domeniului ocupat de sistemul de puncte materiale.

Această modelare susține proprietățile atribuite firului: perfect flexibil și torsionabil, el neputând prelua eforturi de încovoiere și de răsucire.

Forțele interioare, efectiv aplicate, care se exercită între punctele învecinate ale unui fir – de exemplu forțele datorate unor acțiuni intermoleculare – nu pot fi determinate prin calcul mecanic, cel mult pe cale experimentală. Forțele interioare ce pot fi calculate sunt forțele de legătură interioare care apar ca urmare a forțelor exterioare ce se aplică asupra firului.

Aceste forțe vor fi puse în evidență, în baza principiului forțelor de legătură prin ruperea legăturii dintre două puncte alăturate. Aceasta presupune secționarea firului între cele două puncte. Forțele de legătură interioare ce apar (fig. 3.2, *a*) vor fi egale și de sensuri opuse, reprezentând acțiunile reciproce ale celor două puncte, direcția forțelor fiind cea a dreptei ce le unește, tangentă la curba pe care firul o face datorită forțelor exterioare efectiv aplicate și a forțelor exterioare de legătură. Sensul forțelor trebuie să conducă la o solicitare de întindere a celor două bucăți de fir.

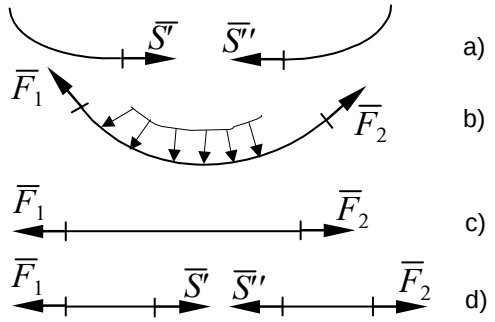


Fig. 3.2.

Conform principiului egali-tății acțiunii cu reacțiunea se poate scrie:

$$\left|\overline{S}'\right| = \left|\overline{S}''\right| = S \qquad (3.7)$$

în care S reprezintă efortul din fir.

Sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a legăturilor firul ia o formă specifică solicitărilor (fig. 3.2, *b*). Această formă este deci o formă de echilibru și ea poartă numele de *curba funiculară* a

sistemului de forțe dat.

Dacă încărcarea firului se compune numai din două forte $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$, aplicate la capetele acestuia (fig. 3.2, *c*), atunci pentru ca echilibrul să existe:

– cele două forțe trebuie să fie egale în modul, să aibă același suport (dreapta ce unește cele două puncte de la capetele firului) și sensuri contrare;

– sensul forțelor trebuie să fie astfel încât să întindă firul.

Forma de echilibru a firului în acest caz este linia dreaptă ce unește punctele de la capetele sale, iar efortul în fir este, în orice secțiune a acestuia, același și egal ca intensitate cu mărimea comună a forțelor exterioare (fig. 3.2, *d*), adică:

$$F_1 = S = S' = F_2 = S. \tag{3.8}$$

Se constată că în cazul în care un punct material este legat de un fir această „legătura" este de fapt o legătură interioară între punct și un punct al firului. Ruperea legăturii implică introducerea unei forțe de legătură care are suportul după direcția firului și cu sensul astfel încât să reprezinte o acțiune de întindere a acestuia.

3.3.1. Frecarea firelor

Fie un fir înfășurat pe suprafața unui cilindru circular drept, aspru, cuprins în planul secțiunii drepte a cilindrului și acționat de forțe de intensități diferite la capetele sale (fig. 3.3). Coeficientul de frecare între fir și cilindru este μ. Condițiile de echilibru ale acestui fir sunt studiate sub denumirea de frecarea firelor.

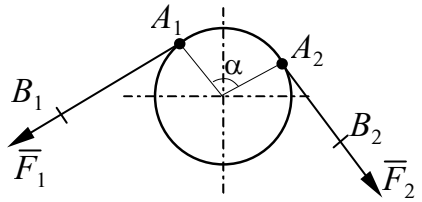


Fig. 3.3

Unghiul de înfășurare al firului este unghiul la centru θ, corespunzător arcului de cerc pe care este înfășurat firul (între punctele A_1 și A_2). Dacă firul este înfășurat numai pe arcul $\overline{A_1A_2}$ atunci unghiul de înfășurare este $\theta = \alpha$; dacă firul este înfășurat de *n* ori pe cilindru atunci $\theta = 2\pi n + \alpha$.

Se consideră că firul este în repus față de cilindru. Cilindrul poate fi în repaus sau poate avea o mișcare de rotație în jurul axului său.

Problema care se pune este de a găsi relația între forțele ce acționează la capetele firului, $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, pentru ca acesta să nu lunece peste cilindru.

Dacă se secționează firul între A_1 și B_1, respectiv între A_2 și B_2, oriunde am face-o, eforturile din fir sunt egale, respectiv, cu forțele de la capete (fig. 3.4, *a*):

$$S_1 = F_1 \ ; S_1 = F_2. \tag{3.9}$$

Pentru determinarea relației căutate se separă din fir, la distanța *s* de unul din capete (distanță corespunzătoare unghiului la centru φ) o porțiune elementară d*s*, egală cu arcul $\overline{AA'}$, subîntins unghiului la centru dφ (fig.3.4, *a*).

Forțele ce acționează asupra acestei porțiuni elementare de fir sunt:

– $\overline{S}$ și $\overline{S}'$ ($\overline{S}'$ de mărime $S' = S + \mathrm{d}S$) – forțe interioare de legătură;

– $\mathrm{d}\overline{N}$ și $\mathrm{d}\overline{T}$ – forțe exterioare de legătură. Forța $\mathrm{d}\overline{T}$ se opune mișcării posibile a firului peste cilindru. Deoarece această mișcare este posibilă în ambele sensuri (adică, atât spre $A_1 \Leftrightarrow F_1 > F_2$ cât și spre $A_2 \Leftrightarrow F_1 < F_2$) se alege un sens arbitrar. În cazul de față s-a ales sensul spre A_2. În consecință forța elementară de frecare de lunecare $\mathrm{d}\overline{T}$ este orientată spre *A* (fig. 3.4, *b*).

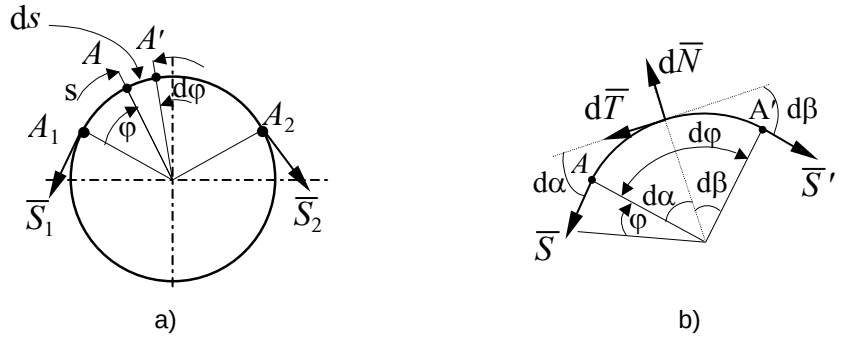


Fig. 3.4.

Echilibrul se exprimă prin două ecuații obținute prin proiectarea tuturor forțelor pe direcția lui $\mathrm{d}\overline{N}$, respectiv a lui $\mathrm{d}\overline{T}$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}N - S\sin\mathrm{d}\alpha - S'\sin\mathrm{d}\beta = 0 \\ \mathrm{d}T + S\cos\mathrm{d}\alpha - S'\cos\mathrm{d}\beta = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Dacă se fac aproximările: $\sin\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\alpha$ și $\cos\mathrm{d}\alpha = 1$, respectiv $\sin\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\beta$ și $\cos\mathrm{d}\beta = 1$, iar $S' = S + \mathrm{d}S$, atunci:

$$\begin{cases} \mathrm{d}N - S\mathrm{d}\alpha - (S + \mathrm{d}S)\mathrm{d}\beta = 0 \\ \mathrm{d}T + S - (S + \mathrm{d}S) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Termenul $\mathrm{d}S\mathrm{d}\beta$ poate fi neglijat în raport cu $\mathrm{d}S$ și deci:

$$\begin{cases} \mathrm{d}N = S(\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta) = S\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}T = \mathrm{d}S \end{cases} \tag{3.12}$$

Condiția de echilibru dată de aspectul fizic al problemei $\mathrm{d}T = \mu\mathrm{d}N$ în baza ecuațiilor (3.12) capătă forma:

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}\varphi,$$

care prin integrare conduce la: $\ln S = \mu\varphi + C$ sau $S = \mathrm{e}^{\mu\varphi + C} = \mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{\mu\varphi} = A\mathrm{e}^{\mu\varphi}$. Deci:

$$S = A\mathrm{e}^{\mu\varphi}. \tag{3.13}$$

În baza condițiilor la limită: pentru $\varphi = 0 \Rightarrow S = F_1$; pentru $\varphi = \theta \Rightarrow S = F_2$, rezultă condiția de echilibru căutată:

$$F_2 = F_1\,\mathrm{e}^{\mu\theta}. \tag{3.14}$$

Valoarea lui F_2 dată de relația (3.14) este o valoare limită corespunzătoare cazului când echilibrul este pe punctul de a se pierde. Pentru ca echilibrul (relativ) dintre fir și cilindru să subziste este necesar ca:

$$F_2 \le F_1\,\mathrm{e}^{\mu\theta}. \tag{3.15}$$

Pentru posibilitatea mișcării în sens contrar condiția de echilibru capătă forma:

$$F_2 \ge F_1\,\mathrm{e}^{-\mu\theta}. \tag{3.15′}$$

Condiția generală de echilibru este:

$$F_1\,\mathrm{e}^{-\mu\theta} \le F_2 \le F_1\,\mathrm{e}^{\mu\theta}. \tag{3.16}$$

Dacă se neglijează frecarea între fir și cilindru, μ=0, efortul este același în tot lungul firului : $S = F_1 = F_2$.

3.3.2. Echilibrul firelor

În cazul în care firul, suspendat la capete de două puncte fixe, este solicitat de forțe concentrate sau repartizate (de exemplu greutatea proprie) în diferitele sale puncte, studiul echilibrului său urmărește determinarea formei de echilibru adică a curbei funiculare.

Problemele care se pun în acest caz sunt:

– determinarea formei curbei funiculare, adică forma curbei cu care poate fi asimilat firul sub acțiunea forțelor aplicate asupra lui și aflate în echilibru;

– determinarea forțelor de legătură exterioare și a efortului din fir într-o secțiune oarecare a acestuia (determinarea valorii maxime a acesteia în vederea efectuării unui calcul de rezistență al firului).

Acest gen de probleme se întâlnesc frecvent în practică (cablurile mașinilor și instalațiilor de ridicat, cablurile de susținere ale telecabinelor, cablurile pentru transportul aerian al energiei electrie etc.) iar rezolvarea lor este prezentată în manuale sau tratate mai extinse ca volum.

Aplicații

A.3.1. Două puncte materiale de greutăți P și Q, așezate pe două plane înclinate ce fac cu orizontala unghiurile α și β, sunt legate cu un fir trecut peste un scripete așa cum se poate observa în figura 3.5, *a*. Să se determine valoarea raportului greutăților P/Q corespunzătoare poziției de echilibru dacă înre punctele materiale și planele înclinate există frecare, iar coeficientul de frecare este μ.

Pentru determinarea condiției care trebuie îndeplinită astfel încât sistemul format din cele două puncte materiale să se afle în echilibru este suficient să se izoleze fiecare punct deoarece condiția necesară și suficientă ca sistemul de puncte materiale să fie în echilibru este ca fiecare din punctele cel alcătuiesc să se afle, la rândul lor, în echilibru.

In figura 3.5, *b* sunt reprezentate forțele ce acționează asupra celor două puncte după ce au fost rupte legăturile și introduse forțele de legătură, pentru cazul în care tendința de mișcare a punctelor este cea precizată în figură.

Se identifică următoare tipuri de forțe: forțe efectiv aplicate – $\overline{P}$ și $\overline{Q}$; forțe de legătură exterioare – $\overline{N}_1, \overline{T}_1$ și $\overline{N}_2, \overline{T}_2$; forțele de legătură interioare - $\overline{S}_1, \overline{S}_2$.

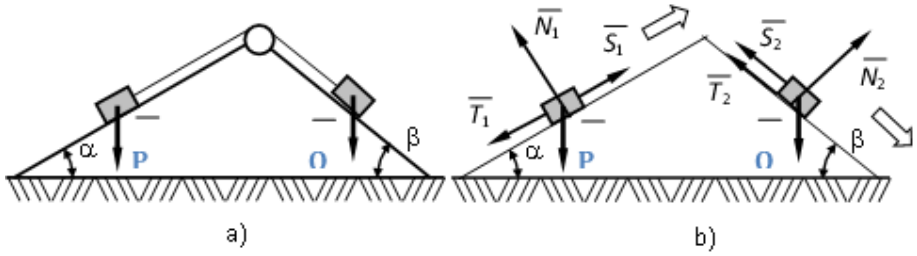


Fig. 3.5.

Deoarece forțele ce acționează asupra celor două puncte materiale sunt forțe concurente, condițiile de echilibru de natură statică constau în două ecuații scalare de echilibru pentru fiecare punct, scrise în raport cu două axe perpendiculare (de obicei cele două axe au direcțiile forțelor $\overline{N}$ și $\overline{T}$):

$$\begin{cases} S_1 - T_1 - P\sin\alpha = 0 \\ N_1 - P\cos\alpha = 0 \end{cases} \tag{a}$$

$$\begin{cases} -S_2 - T_2 + Q\sin\beta = 0 \\ N_2 - Q\cos\beta = 0 \end{cases} \tag{b}$$

Condițiile de natură fizică pentru cele două puncte:

$$\begin{cases} T_1 \le \mu N_1 \\ T_2 \le \mu N_2 \end{cases} \tag{c}$$

trebuiesc îndeplinite în același timp deoarece dacă unul din puncte își pierde echilibru și începe să lunece, atunci și celălalt punct începe să lunece pierzându-și echilibru.

Se constată că sunt 7 necunoscute (cea de a șaptea fiind raportul P/Q). Pentru a putea rezolva problema trebuiesc impuse condiții suplimentare asupra sitemului de forțe. Forțele de legătură interioare $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ reprezintă tensiunile din firul ce leagă cele două puncte și care este trecut peste un scripete (fig. 3.5, *a*). Dacă se neglijează frecarea dintre fir și scripete atunci se poate scrie relația:

$$S_1 = S_2; \tag{d}$$

dacă însă această frecare nu se poate neglija atunci între cele două marimi S_1 și S_2 se poate scrie o relație de forma (3.15) sau (3.15′), bineînțeles dacă se cunoaște coeficientul de frecare dintre fir și scripete.

Dacă se admite că relația (d) este adevărată atunci prin înlocuirea în sistemul de inecuații (c) a mărimilor N_1, N_2, T_2 și T_2 determinate din ecuațiile (a) și (b), și prin rezolvarea acestuia se obține:

$$\frac{P}{Q} \geq \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}. \qquad \text{(e)}$$

Pentru cazul în care tendința de mișcare a punctelor este inversă decât cea considerată în figura 3.5, *b*, condiția de echilibru se obține schimbând în inecuația (e) sensul inegalității și semnul coeficientului de frecare μ:

$$\frac{P}{Q} \leq \frac{\sin\beta + \mu\cos\beta}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}. \qquad \text{(f)}$$

Rezultă că sistemul de puncte materiale se află în echilibru dacă:

$$\frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \leq \frac{P}{Q} \leq \frac{\sin\beta + \mu\cos\beta}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}. \qquad \text{(e)}$$

Deoarece $P/Q > 0$, pentru ca problema să existe trebuie să fie îndeplinite condițiile: $\mathrm{tg}\alpha > \mu$ și $\mathrm{tg}\beta > \mu$.

A.3.2. Un fir perfect flexibil și inextensibil este trecut peste doi cilindrii așa cum se arată în figura 3.6, *a*. De capetele firului sunt suspendate două greutăți *Q* și *F*. Cunoscând coeficienții de frecare dintre cei doi cilindrii și fir, μ_1 și μ_2, să se determine valoarea greutății F astfel încât sistemul să rămână în echilibru.

Echilibrul există atâta timp cât firul rămâne în repaus față de cei doi cilindrii, fapt pentru care aceștia s-au izolat prin secționarea firului în zona dintre ei introducându-se forța de legătură (tensiunea) $\overline{S}$, așa cun se arată în figura 3.6, *b*. Deoarece echilibrul se poate pierde fie în sensul forței $\overline{Q}$, fie

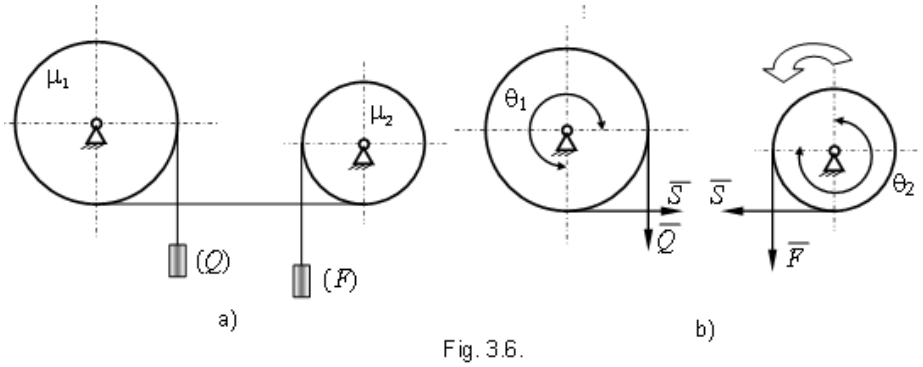


Fig. 3.6.

în sensul forței $\overline{F}$, s-a ales tendința de alunecare a firului în sensul forței $\overline{F}$ (fig. 3.6, *b*). În consecință, echilibrul se pierde atunci când $F > S > Q$.

Având în vedere relația (3.15) condițiile de echilibru la limită pentru cei doi cilindrii sunt:

$$\begin{aligned} F &= Se^{\theta_2\mu_2} \\ S &= Qe^{\theta_1\mu_1}. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Din figura 3.6, *b* unghiurile de înfășurate θ_1 și θ_2 au mărimile $\theta_1 = \theta_2 = 3\pi/4$, și prin eliminarea lui *S* din cele două ecuații (a) rezultă valoarea limită a lui *F* pentru ca firul să nu alunece în raport cu cilindrii în sensul ales:

$$F = Qe^{\theta_1\mu_1+\theta_2\mu_2} = Qe^{\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)}. \qquad \text{(b)}$$

Pentru ca echilibrul să existe forța $\overline{F}$ trebuie să îndeplinească condiția:

$$F \le Qe^{\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)}. \qquad \text{(c)}$$

În situația în care echilibrul se pierde în sensul forței $\overline{Q}$, condiția de echilibru se obține din relația (c) în care se modifică sensul inegalității și semnul coeficienților de frecare, adică:

$$F \ge Qe^{-\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)}. \qquad \text{(d)}$$

Rezultă că valoarea greutății *F* pentru care sistemul rămâne în echilibru este:

$$Qe^{-\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)} \le F \le Qe^{\frac{3\pi}{4}(\mu_1+\mu_2)}. \qquad \text{(e)}$$

A.3.3. Un corp de greutate *G* este situat pe un plan orizontal aspru, coeficientul de frecare fiind $\mu_1 = 1/2$. De corp este legat un fir perfect flexibil și inextensibil, ce face cu orizontala unghiul $\alpha = \pi/6$ și care este trecut peste un scripete fix. La capătul celălălt al firului se află o greutate *P* (fig. 3.7, *a*). Stiind că între fir și scripte coeficientul de frecare este $\mu_2 = 3/\pi$, să se determine valoarea lui *P* astfel încât corpul să se afle pe punctul de a începe să se miște.

Sistemul format din corp și fir rămâne în echilibru atâta timp cât fiecare din cele două elemente care îl compun rămân în echilibru. Rezultă necesitatea separării lor și studierea condițiilor de echilibru pentru fiecare în parte. În figura 3.7, b sunt prezentate corpul și firul sub acțiunea forțelor

efectiv aplicate ($\overline{G}, \overline{P}$), a forțelor de legătură exterioare ($\overline{N}, \overline{T}$) și a forțelor de legătură inteioare ($\overline{S}$). Sensul forței de frecare $\overline{T}$ a fost ales în concordanță cu posibilitatea de mișcare pe planul o rizontal a corpului.

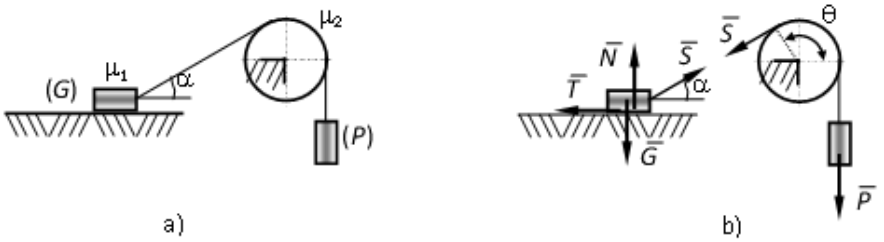


Fig. 3.7.

Pentru corp, ecuațiile de echilibru atunci când acesta este pe punctul de a începe să alunece pe planul orizontal, au forma:

$$\begin{cases} -G + N + S\sin\alpha = 0 \\ T - S\cos\alpha = 0 \\ T = \mu_1 N \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Deoarece firul trecut peste scripetele fix poate aluneca numai în sensul forței $\overline{P}$, relația (3.15) în acest caz capătă forma:

$$P = Se^{\mu_2\theta}. \qquad \text{(b)}$$

După eliminarea necunoscutelor secundare (N, T, S) din ecuațiile (a) și (b) rezultă valoarea lui P pentru care corpul de greutate G este pe punctul de a începe să alunece pe planul orizontal:

$$P = \frac{\mu_1 G}{\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha} e^{\mu_2\theta}. \qquad \text{(c)}$$

Având în vedere că unghiul de înfășurare al firului peste scripetele fix este $\theta = \pi/3 + \pi/2 = 2\pi/3$, după înlocuirea în egaliatea (c) a valorilor numerice rezulta $P = 5{,}41G$.

Teste

T.3.1. In cadrul unui sistem discret de puncte materiale forțele interioare sunt:

a) două câte două egale;
b) două câte două egale și de același sens;
c) două câte două egale, cu același suport și de sensuri contrare;
d) două câte două egale și paralele.

T.3.2. Pentru ca un fir solicitat de două forțe aplicate la capetele acestuia să fie în echilibru trebuie ca:

a) sensul forțelor să fie astfel încât să întindă firul;
b) cele două forțe să fie egale și direc opuse;
c) cele două forțe să aibă sensuri contrare;
d) cele două forțe să aibă același suport și sensuri contrare.

T.3.3. În cadrul unui sistem de n puncte materiale numărul ecuațiilor de echilibru de natură statică sunt:

a) $2n$ și sunt suficiente pentru determinarea condițiilor de echilibru;
b) $3n$ și sunt suficiente pentru determinarea condițiilor de echilibru;
c) $2n$ și se completează cu relațiile de natură geometrică și fizică;
d) $3n$ și se completează cu relațiile de natură geometrică și fizică.

T.3.4. Un fir este trecut peste un cilindru aspru (coeficient de frecare $\mu = 0{,}1628$) de mai multe ori, așa cum se poate vedea în figura 3.8. La capetele firului sunt aplicate două forțe $\overline{Q}$ și $\overline{P}$ ($P = 10Q$). La echilibru, numărul de înfășurări complete ale firului peste cilindru este:

a) $n = 4$; *b*) $n = 5$;
c) $n = 3$; *d*) $n = 2$.

T.3.5. Două sfere mici A și B, fiecare de greutate G, sunt legate printr-un fir inextensibil și așezate peste un semicilindru fix (fig. 3.9). Unghiul la centru a al arcului AB este cunoscut. Ungiul de frecare al sferelor de cilindru este φ. Unghiul θ, în poziția de echilibru a celor două sfere, trebuie să îndeplinească condiția:

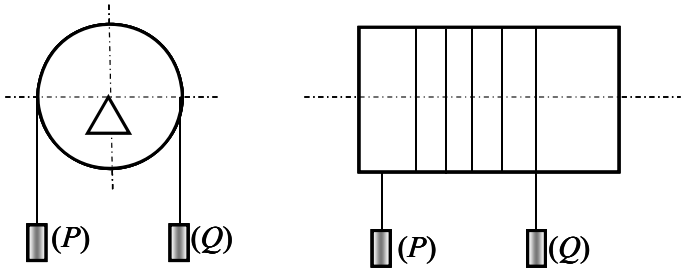


Fig. 3.8.

a) $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\varphi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\varphi$

b) $\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+\varphi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}-\varphi$

c) $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\varphi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\varphi$

d) $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\varphi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}+\varphi$

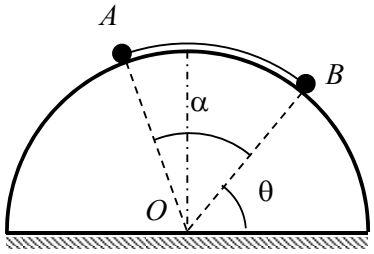


Fig. 3.9.

T.3.6. Pe bara *ABC*, curbată sub 90° ca în figura 3.10, lunecă fără frecare două culise de greutate *P* respectiv *G*, unite prin firul de lungime *l*. În poziția de echilibru unghiul θ dintre fir și bara *AB* și tensiunea *S* din fir au valorile:

a) $\tan\theta = \frac{P\sqrt{3}}{G}; S = \frac{1}{2}\sqrt{P^2+3G^2}$;

b) $\tan\theta = \frac{P\sqrt{3}}{G}; S = \frac{1}{2}\sqrt{G^2+3P^2}$;

c) $\tan\theta = \frac{G\sqrt{3}}{P}; S = \frac{1}{2}\sqrt{G^2+3P^2}$;

d) $\tan\theta = \frac{G\sqrt{3}}{P}; S = \frac{1}{2}\sqrt{P^2+3G^2}$;

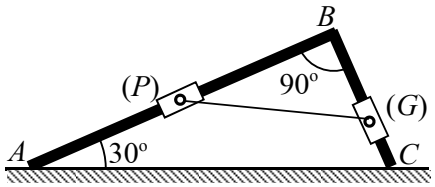


Fig. 3.10.

T.3.7. Condiția necesară și suficientă pentru existența echilibrului unui punct material *i* din cadrul sistemului de *n* puncte materiale, este:

a) $\overline{F}_{i,a}^{int} + \overline{F}_{i,l}^{int} = 0;$

b) $\sum_{s} \overline{F}_{is,a}^{ext} + \sum_{k} \overline{F}_{ik,l}^{ext} = 0$

c) $\overline{F}_{i}^{ext} + \overline{F}_{i}^{\text{int}} = 0;$

d) $\overline{F}_{i}^{int} = 0.$

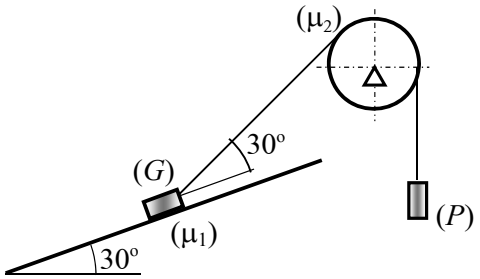


Fig. 3.11.

T.3.8. Un corp de greutate *G* este situat pe un plan înclinat aspru (coeficientul de frecare între corp și plan $\mu_1 = 0{,}5$) și este menținut în echilibru prin intermediul unui fir perfect flexibil și inextensibil trecut peste un cilindru (coeficientul de frecare între fir și cilindru $\mu_2 = 1/\pi$) de greutatea *P*. La echilibru:

a) $0{,}363G \le P \le 1{,}924G$;

b) $0{,}263G \le P \le 1{,}824G$;

c) $0{,}163G \le P \le 1{,}724G$;

d) $0{,}063G \le P \le 1{,}624G$.

4. STATICA SOLIDULUI RIGID

Conceptul de continuum material a fost prezentat în paragraful 1.1. În mecanica teoretică se consideră că diferitele distanțe dintre punctele materiale ale continuumului rămân constante oricât de mare ar fi intensitatea forțelor ce acționează asupra punctelor lui.

Acest model al corpului material a fost introdus pentru simplificarea, la început, a calculelor, fără ca rezultatele să se îndepărteze prea mult de realitate.

Această modelare definește în mecanica teoretică conceptul de *solid rigid* și are la bază *principiul rigidității* cu cele două aspecte ale sale:

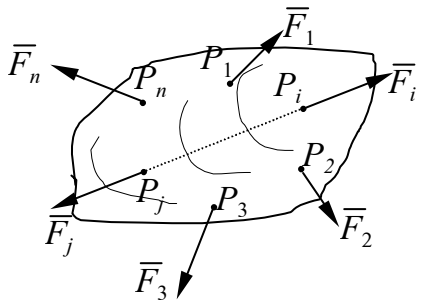


Fig. 4.1.

– *aspectul geometric* (fig. 4.1) prin care se afirmă că distanța dintre două puncte P_i și P_j ale corpului rămâne invariabilă;

– *aspectul fizic* care afirmă că două forțe $\overline{F}_i$ și $\overline{F}_j$ egale ca mărime, aplicate în punctele P_i și P_j, , având același suport ($\overline{P_iP_j}$) și sensuri contrare (se spune că cele două forțe sunt egale și direct opuse), nu au nici-un efect mecanic asupra corpului.

4.1. OPERAŢII ELEMENTARE DE ECHIVALENŢĂ

Prin operații elementare de echivalență se înțeleg acele operații simple ce se pot aplica unui sistem de forțe dat care acționează asupra unui solid rigid, fără să se modifice efectul mecanic pe care sistemul de forțe îl are asupra acestuia.

Aceste operații elementare de echivalență sunt definite în continuare.

1) Introducerea într-un sistem de forțe aplicate unui solid rigid (sau scoaterea dintr-un sistem de forțe) a unor perechi de forțe coliniare egale și direct opuse nu modifică efectul mecanic pe care îl are sistemul de forțe dat asupra solidului rigid (fig. 4.1);

2) Efectul mecanic al unei forțe ce aparține unui sistem de forțe aplicat unui solid rigid rămâne neschimbat dacă forța este deplasată pe suportul ei (forța poate luneca pe suportul ei). În punctul P_j (fig. 4.2), situat pe suportul forței $\overline{F}_i$, în baza primei operații elementare de echivalență, se introduc două forțe egale și direct opuse $\overline{F}_j$ și $\overline{F}_j'$, ce au suportul $\overline{P_iP_j}$. Mărimea celor două forțe se alege egală cu cea a forței $\overline{F}_i$: $\left|\overline{F}_j\right| = \left|\overline{F}_j'\right| = \left|\overline{F}_i\right|$. Dar, tot în baza primei operații elementare de echivalență, forțele $\overline{F}_i$ și $\overline{F}_j'$ se pot elimina. Rezultatul obținut: forța $\overline{F}_i$ a alunecat pe suportul său din punctul P_i în punctul P_j.

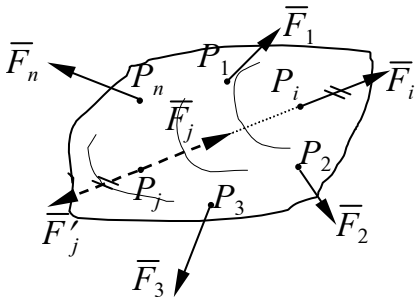


Fig. 4.2.

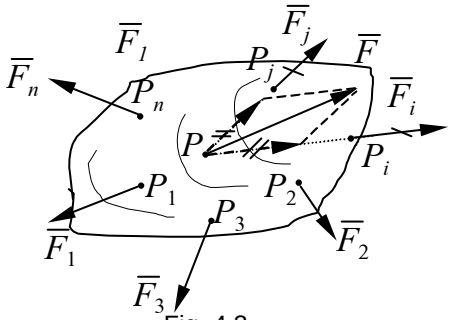


Fig. 4.3.

3) În baza primelor două operații elementare de echivalență și a principiului paralelogramului, se observă că, două sau mai multe forțe aplicate asupra unui solid rigid, în puncte diferite ale acestuia, dar care au suporturile concurente, pot fi înlocuite cu o singură forță al cărei suport trece prin punctul lor de intersecție și este egală cu rezultanta lor. Astfel în figura 4.3 forțele $\overline{F}_i$ și $\overline{F}_j$ aplicate în punctele P_i, respectiv P_j, au suporturile concurente în punctul P. Aplicând a doua operație elementară de echivalență cele două forțe sunt deplasate pe suporturile lor până când punctele lor de

aplicație ajung în P. Aplicând principiul paralelogramului (prezentat în parag. 2.1.1) cele două forțe se înlocuiesc cu rezultanta lor $\overline{F} = \overline{F}_i + \overline{F}_j$.

Operațiile elementare de echivalență ne vor permite să demonstrăm când două sisteme de forțe aplicate independent asupra aceluiași solid rigid au același efect mecanic.

Pentru aceasta este necesar să se introducă noțiunea de moment al unui vector în raport cu un punct, respectiv în raport cu o axă.

4.2. MOMENTUL UNEI FORŢE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Prin definiție, momentul unei forțe în raport cu un punct, notat $\mathcal{M}_O\overline{F}$ este un vector:

– aplicat în punctul O (numit și *pol*) ;

– perpendicular pe planul definit de polul O și suportul forței $\overline{F}$;

– cu sensul ales astfel încât un observator așezat în O, orientat după direcția momentului, să vadă vectorul $\overline{F}$ că rotește (în mod aparent) planul $(O, \overline{F})$ în sensul pozitiv ales (în cadrul acestui curs sensul pozitiv este sensul trigonometric);

– cu mărimea egală cu produsul $F \cdot d$, unde d este distanța de la punctul O la suportul forței $\overline{F}$ (fig. 4.4).

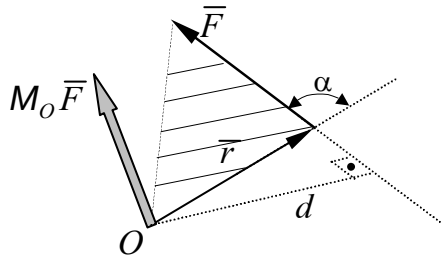


Fig. 4.4.

Expresia vectorială a momentului unei forțe în raport cu un punct este:

$$\mathcal{M}_O\overline{F} = \overline{r} \times \overline{F}, \tag{4.1}$$

în care $\overline{r}$ este vectorul de poziție (față de polul O) al punctului de aplicație al forței $\overline{F}$ (fig. 4.4).

Simbolul $\mathcal{M}$ trebuie privit ca un „operator” aplicat vectorului $\overline{F}$, așa încât momentul forței $\overline{F}$ este o consecință directă a operației efectuate asupra lui $\overline{F}$.

Mărimea (norma) momentului unei forțe în raport cu un punct este:

$$\left|\mathrm{M}_O\overline{F}\right| = |\overline{r}||\overline{F}|\sin\alpha = Fd\,, \qquad (4.2)$$

ea fiind exprimată prin produsul dintre mărimea forței și brațul acesteia, adică dintre mărimea forței și distanța de la punctul în raport cu care se calculează momentul la suportul forței (v. fig. 4.4)

4.2.1. Proprietăţile momentului unei forţe în raport cu un punct

Din definiția momentului unei forțe în raport cu un punct reies mai multe consecințe:

a) Momentul unei forțe în raport cu un punct este nul când:

– forța $\overline{F}$ are intensitatea nulă;

– suportul forței $\overline{F}$ trece prin polul *O*.

b) Momentul unei forțe în raport cu un punct nu se modifică dacă forța lunecă pe suportul ei. Conform cu figura 4.5 se poate constata că:

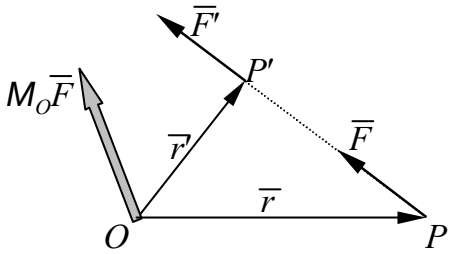


Fig. 4.5.

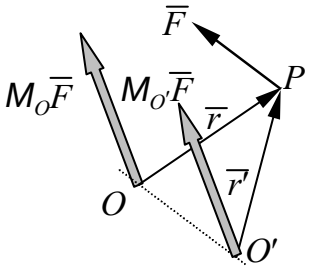


Fig. 4.6.

$$\mathcal{M}_O\overline{F}' = \overline{r}'\times\overline{F}' = (\overline{r}+\overline{PP'})\times\overline{F} = \overline{r}\times\overline{F} + \overline{PP'}\times\overline{F} = \overline{r}\times\overline{F} = \mathcal{M}_O\overline{F}\,, \quad (4.3)$$

deoarece: $\overline{F} = \overline{F}'$; $\overline{r}' = \overline{r} + \overline{PP'}$ și $\overline{PP'}\times\overline{F} = 0$ (vectori coliniari).

c) Momentele unei forțe $\overline{F}$ în raport cu punctele situate pe o dreaptă paralelă cu suportul ei, sunt egale. Conform cu figura 4.6 se poate scrie:

$$\mathcal{M}_{O'}\overline{F} = \overline{r}'\times\overline{F} = (\overline{O'O} + \overline{r})\times\overline{F} = \overline{r}\times\overline{F} = \mathcal{M}_O\overline{F}\,. \qquad (4.4)$$

d) Momentele a două forțe egale și direct opuse sunt egale și direct opuse (fig. 4.7).

Dacă $\overline{F} = -\overline{F}'$ atunci:

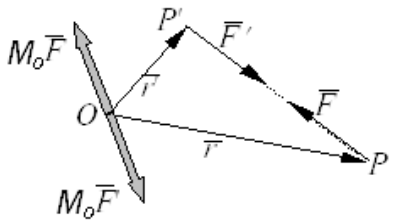


Fig. 4.7.

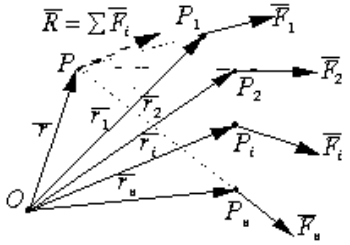


Fig. 4.8.

$$\mathcal{M}_O\overline{F}' = \overline{r}' \times \overline{F}' = (\overline{r} + \overline{PP'}) \times \overline{F}' = \overline{r} \times \overline{F}' + \overline{PP'} \times \overline{F}' = -\overline{r} \times \overline{F} = -\mathcal{M}_O\overline{F}\,. \tag{4.5}$$

În baza celor prezentate rezultă că două forțe ($\overline{F}$ și $\overline{F}'$) sunt egale și direct opuse atunci când:

$$\overline{F} + \overline{F}' = 0 \quad \text{și} \quad \mathcal{M}_O\overline{F} + \mathcal{M}_O\overline{F}' = 0. \tag{4.6}$$

e) Momentul forței rezultante a unor forțe concurente, în raport cu un punct, este egal cu suma momentelor forțelor concurente în raport cu același punct (*teorema lui Varignon*).Conform figurii 4.8 se poate scrie:

$$\mathcal{M}_O\overline{R} = \overline{r} \times \overline{R} = \overline{r} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n) = \overline{r} \times \overline{F}_1 + \overline{r} \times \overline{F}_2 + \ldots + \overline{r} \times \overline{F}_n =$$
$$= \mathcal{M}_O\overline{F}_1 + \mathcal{M}_O\overline{F}_2 + \ldots + \mathcal{M}_O\overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O\overline{F}_i\,. \tag{4.7}$$

4.2.2. Expresia analitică a momentului unei forţe în raport cu un punct

Dacă punctul O în raport cu care se calculează momentul forței $\overline{F}$ are coordonatele (x_0, y_0, z_0) față de sistemul de referință $O'xyz$ (fig. 4.9), iar punctul de aplicație al forței $\overline{F}$ este $P(x, y, z)$, atunci momentul forței $\overline{F} = \overline{i}\,F_x + \overline{j}\,F_y + \overline{k}\,F_z$ are următoarea expresie analitică:

$$\mathcal{M}_O\overline{F} = \bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = [(y - y_0)F_z - (z - z_0)F_y]\,\bar{i} +$$

$$+ [(z - z_0)F_x - (x - x_0)F_z]\,\bar{j} + [(x - x_0)F_y - (y - y_0)F_x]\,\bar{k} \qquad (4.8)$$

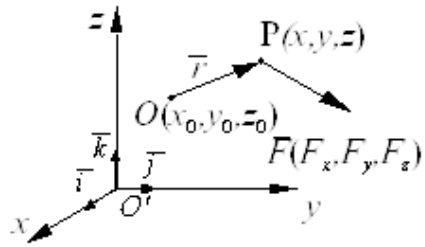


Fig. 4.9.

Dacă se notează cu M_x, M_y, M_z componentele momentului forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O pe axele sistemului de referință în conformitate cu (4.8) se poate scrie:

$$M_x = (y - y_0)F_z - (z - z_0)F_y;$$
$$M_y = (z - z_0)F_x - (x - x_0)F_z; \qquad (4.9)$$
$$M_z = (x - x_0)F_y - (y - y_0)F_x.$$

Dacă $O \equiv O'$, adică sistemul de referință are originea în O, atunci relațiile (4.9) devin:

$$M_x = yF_z - zF_y;$$
$$M_y = zF_x - xF_z; \qquad (4.10)$$
$$M_z = xF_y - yF_x.$$

4.3. MOMENTUL UNEI FORŢE ÎN RAPORT CU O AXĂ

Proiecția pe o axă Δ a momentului unei forțe $\overline{F}$ în raport cu un punct O ce aparține axei, se numește momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa Δ. El se notează $\mathcal{M}_\Delta\overline{F}$ și este exprimat prin relația:

$$\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = \mathrm{pr}(\mathcal{M}_O\overline{F})_\Delta = (\mathcal{M}_O\overline{F})\cdot\bar{\delta} = (\bar{r} \times \overline{F})\cdot\bar{\delta} \qquad (4.11)$$

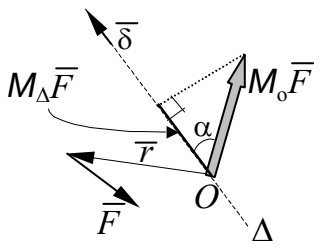


Fig. 4.10.

unde $\overline{\delta}$ este versorul axei Δ (fig. 4.10). Se poate dovedi ușor că punctul O în raport cu care se calculează $\mathcal{M}_O \overline{F}$, se poate lua oriunde pe axa Δ, valoarea momentului $\mathcal{M}_\Delta \overline{F}$ rămânând neschimbată.

Din cele prezentate rezultă că momentul unei forțe în raport cu o axă este o mărime scalară, al cărei semn depinde de mărimea unghiului α dintre $\mathcal{M}_O \overline{F}$ și versorul $\overline{\delta}$ (fig. 4.10)

4.3.1. Proprietăţile momentului unei forţe în raport cu o axă

Din definiția momentului unei forțe în raport cu o axă se pot deduce mai multe concluzii:

a) Momentul unei forțe în raport cu o axă este nul dacă:

– intensitatea forței este nulă;

– suportul forței este coplanar cu axa (intersectează axa sau este paralelă cu ea);

b) Momentul unei forțe în raport cu o axă rămâne neschimbat dacă forța lunecă pe suportul ei. Această proprietate este evidentă deoarece $\mathcal{M}_O \overline{F}$ nu se modifică (v.par. 4.2.1, *b*);

c) Momentele a două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ egale și direct opuse, în raport cu aceeași axă, sunt egale și de semne diferite:

$$\mathcal{M}_\Delta \overline{F}' = (\mathcal{M}_O \overline{F}') \cdot \overline{\delta} = (-\mathcal{M}_O \overline{F}) \cdot \overline{\delta} = -\mathcal{M}_\Delta \overline{F} \qquad (4.12)$$

în baza relației (4.5)

d) Suma algebrică a momentelor în raport cu o axă a unor forțe ce au suporturile concurente într-un punct este egală cu momentul în raport cu acea axă a rezultantei forțelor. Acestă proprietate este o consecință a proprietății *e*) enunțată în paragraful 4.2.1 și a definiției momentului unei forțe în raport cu o axă.

4.3.2. Expresia analitică a momentului unei forţe în raport cu o axă

Dacă versorul $\overline{\delta}$ al axei Δ are cosinuși directori (l, m, n) în sistemul de axe $O'xyz$ cu notațiile anterioare (fig. 4.11) rezultă:

$$\mathcal{M}_\Delta \overline{F} = \overline{\delta} \cdot (\overline{r} \times \overline{F}) = \begin{vmatrix} l & m & n \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = [(y - y_0)F_z - (z - z_0)F_y]l +$$

$$+ [(z - z_0)F_x - (x - x_0)F_z]m + [(x - x_0)F_y - (y - y_0)F_x]n \quad (4.13)$$

Dacă axa Δ trece prin originea O' a sistemului de referință, expresia (4.13) capătă forma:

$$\mathcal{M}_\Delta \overline{F} = (yF_z - zF_y)l + (zF_x - xF_z)m + (xF_y - yF_x)n \quad (4.14)$$

Momentele forței $\overline{F}$ în raport cu axele sistemului de referință $O'xyz$ sunt:

$$\mathcal{M}_{O'x} \overline{F} = yF_z - zF_y = M_x;$$

$$\mathcal{M}_{O'y} \overline{F} = zF_x - xF_z = M_y; \quad (4.15)$$

$$\mathcal{M}_{O'x} \overline{F} = xF_y - yF_x = M_z.$$

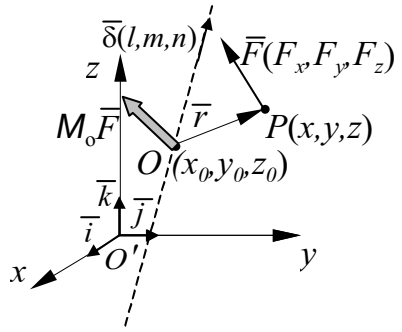


Fig. 4.11.

Din compararea relațiilor (4.10) și (4.15) se constata că momentele forței $\overline{F}$ în raport cu axele sistemului de referință sunt de fapt componentele momentului forței $\overline{F}$ calculat în raport cu originea sistemului de referință.

Observație. Din cele prezentate anterior rezultă că atât momentul unei forțe în raport cu un punct $\mathcal{M}_O \overline{F}$, cât și momentul unei forțe în raport cu o axă $\mathcal{M}_\Delta \overline{F}$ rămân neschimbate dacă li se aplică operațiile elementare de echivalență.

4.4. TORSORUL UNUI SISTEM DE FORŢE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

Prin definiție, torsorul unui sistem de forțe de n forțe $\overline{F}_i$, (i = 1,2,...,n) notat $T_O(\overline{F}_i)$, este format din doi vectori (fig. 4.12):

– vectorul rezultant, $\overline{R}$, aplicat în punctul O și egal cu suma vectorilor forță $\overline{F}_i$:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i ;$$

– vectorul moment rezultant, $\overline{M}_O$, aplicat în punctul O și egal cu suma momentelor forțelor $\overline{F}_i$ (aplicate în punctele P_i), în raport cu O:

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O \overline{F}_i .$$

Punctul O, față de care se calculează momentul rezultant, poartă numele de originea torsorului.

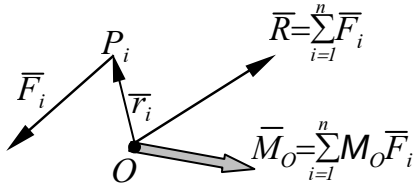


Fig. 4.12.

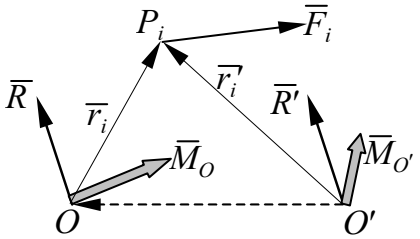


Fig. 4.13.

Cei doi vectori nu au o semnificație fizică dar ei pot să caracterizeze împreună sistemul de forțe $\overline{F}_i$ din punctul de vedere al efectului mecanic pe care acesta îl are asupra solidului rigid.

Vectorul rezultant $\overline{R}$ nu depinde de vreun sens pozitiv ales, pe când vectorul moment rezultant $\overline{M}_O$ depinde de sensul pozitiv ales pentru rotația axelor sistemului de referință adoptat.

4.4.1. Proprietăţi ale torsorului unui sistem de forţe

a) **Variația torsorului cu schimbarea originii**. Se poate observa că vectorul rezultant $\overline{R}$ al torsorului $T_O(\overline{F}_i)$ nu se schimbă atunci când torsorul se calculează față de un alt punct O' (fig. 4.13) deoarece:

$$\overline{R}' = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{R} \,. \tag{4.16}$$

Se spune că vectorul rezultant este un invariant față de punctul în raport cu care se calculează torsorul unui sistem de forțe.

În ceea ce privește vectorul moment rezultant:

$$\overline{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}_{O'} \overline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i' \times \overline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\overline{O'O} + \overline{r}_i) \times \overline{F}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{O'O} \times \overline{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \overline{O'O} \times \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i + \overline{M}_O = \overline{O'O} \times \overline{R} + \overline{M}_O \,.$$

Rezultă că torsorul sistemului de forțe $\overline{F}_i$ calculat față de punctul O' are următoarea expresie în funcție de componentele torsorului $T_O(\overline{F}_i)$:

$$T_{O'}(\overline{F}_i) \begin{cases} \overline{R}' = \overline{R} \\ \overline{M}_{O'} = \overline{M}_O + \overline{O'O} \times \overline{R} \end{cases} . \tag{4.17}$$

b) **Scalarul torsorului**. Dacă multiplicăm relația vectorului moment rezultant din (4.17) scalar cu $\overline{R}$ rezultă:

$$\overline{M}_{O'} \cdot \overline{R} = \overline{M}_O \cdot \overline{R} + (\overline{O'O} \times \overline{R}) \cdot \overline{R}$$

Deoarece produsul mixt $(\overline{O'O} \times \overline{R}) \cdot \overline{R} = 0$ (doi vectori sunt coliniari) rezultă:

$$\overline{M}_{O'} \cdot \overline{R} = \overline{M}_O \cdot \overline{R} \tag{4.18}$$

Produsul $\overline{M}_O \cdot \overline{R}$ poartă numele de scalarul torsorului și este și el un invariant al sistemului de forțe $\overline{F}_i$ în raport cu schimbarea originii torsorului.

c) **Proiecția lui $\overline{M}_O$ pe direcția lui $\overline{R}$**. Dacă relația (4.18) se multiplică cu $1/\left|\overline{R}\right|$ se obține:

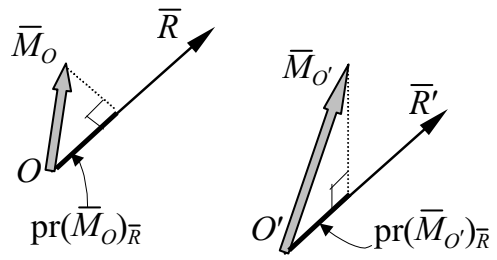


Fig. 4.14.

$$\overline{M}_{O'} \cdot \frac{\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|} = \overline{M}_O \cdot \frac{\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|} \qquad (4.19)$$

în care se recunoaște proiecția vecto-rului moment rezultant $\overline{M}_O$, respec-tiv $\overline{M}_{O'}$ pe direcția vectorului rezul-tant $\overline{R}$ (fig. 4.14), adică:

$$\mathrm{pr}(\overline{M}_O)_{\overline{R}} = \mathrm{pr}(\overline{M}_{O'})_{\overline{R}}\,.$$

Se deduce că, indiferent de punctul în raport cu care se calculează torsorul unui sistem de forțe, proiecția vectorului moment rezultant pe direcția vectorului rezultant este aceeași.

d) **Torsorul minim și axa centrală**. Să descompunem vectorii moment rezultant $\overline{M}_O$ și $\overline{M}_{O'}$ după direcția vectorului rezultant și după o direcție normală la acesta (fig. 4.15). Se poate constata că $\overline{M}_O$ diferă de $\overline{M}_{O'}$ prin componenta normală la $\overline{R}$ deoarece s-a arătat că $\left|\overline{M}'_O\right| = \left|\overline{M}'_{O'}\right|$.

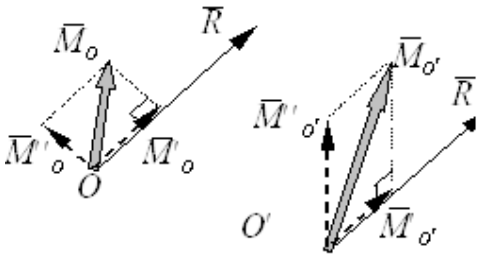


Fig. 4.15.

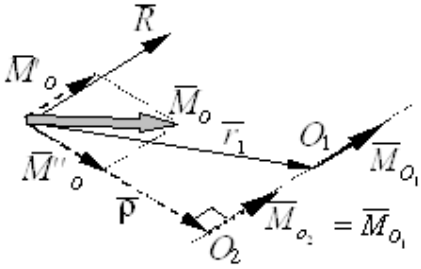


Fig. 4.16.

Deoarece proiecția unui vector pe o direcție oarecare este mai mică decât norma lui, înseamnă că, dacă ar exista un punct O_1 în care vectorul moment rezultant $\overline{M}_{O_1}$ să aibă direcția vectorului rezultant $\overline{R}$, atunci vectorul $\overline{M}_{O_1}$ ar avea cea mai mică normă, egală cu proiecția lui pe suportul lui $\overline{R}$. Dacă se poate dovedi existența unui astfel de punct, atunci el nu ar fi

unic, ci vor exista mai multe puncte situate pe o dreaptă paralelă cu $\overline{R}$ ce trece prin O_1, față de care vectorul moment rezultant are norma cea mai mică.

Un astfel de punct se poate găsi prin vectorul de poziție $\overline{r}_1$ al punctului O_1 față de punctul O, vector cu originea în punctul față de care s-a calculat torsorul $T_O(\overline{F}_i)$ (fig. 4.16).

În baza relației (4.17) vectorul moment rezultant în O_1 este:

$$\overline{M}_{O_1} = \overline{M}_O + \overline{O_1O} \times \overline{R} = \overline{M}_O - \overline{r}_1 \times \overline{R} \tag{4.20}$$

A scrie că $\overline{M}_{O_1}$ are valoare minimă este achivalent cu a scrie că el este paralel cu vectorul $\overline{R}$, deci, înmulțind relația (4.20) vectorial la stânga cu $\overline{R}$ se obține:

$$\overline{R} \times \overline{M}_{O_1} = \overline{R} \times \overline{M}_O - \overline{R} \times (\overline{r}_1 \times \overline{R}) = \overline{R} \times \overline{M}_O - \overline{r}_1 \cdot \overline{R}^2 + \overline{R} \cdot (\overline{r}_1 \cdot \overline{R}) = 0 \tag{4.21}$$

Așa cum anticipam, se constată că sunt mai multe soluții pentru $\overline{r}_1$ care satisfac relația (4.21) (suma a doi vectori oarecare trebuie să rămână constantă). Deoarece este suficientă o singură soluție, se alege soluția particulară care anulează produsul scalar $\overline{r}_1 \cdot \overline{R}$, deci acea soluție pentru care vectorul $\overline{r}_1$ este perpendicular pe suportul lui $\overline{R}$. Fie $\overline{\rho}$ vectorul pentru care $\overline{\rho} \cdot \overline{R} = 0$. În acest caz relația (4.21) devine:

$$\overline{R} \times \overline{M}_O - \overline{\rho} \cdot \overline{R}^2 = 0 \tag{4.22}$$

din care rezultă:

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{R} \times \overline{M}_O}{\overline{R}^2} \tag{4.23}$$

Din (4.23) se deduce că punctul căutat și identificat prin vectorul $\overline{\rho}$ există. Mai mult, se constată că $\overline{\rho}$ este normal nu numai pe $\overline{R}$, ci și pe planul format de $\overline{R}$ și $\overline{M}_O$ și are sensul determinat de sensul pozitiv de rotație al produsului vectorial $\overline{R} \times \overline{M}_O$, definind astfel, în mod unic, un punct O_2, față de care vectorul moment rezultant are valoare minimă:

$$\left|\overline{M}_{O_2}\right| = pr(\overline{M}_O)_{\overline{R}} = \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{R}}{\left|\overline{R}\right|}. \tag{4.24}$$

Celelalte puncte, în care vectorul moment rezultant are aceeași valoare, sunt situate pe o dreaptă paralelă cu $\overline{R}$ ce trece prin punctul O_2. Aceată dreaptă poartă numele de *axă centrală*.

În orice punct al axei centrale torsorul are valoare minimă. Așadar, axa centrală poate fi definită ca locul geometric al tuturor punctelor în care torsorul unui sistem de forțe îmbracă forma minimală, adică:

$$T_{O_1}(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\\ \overline{M}_{O_1}=\dfrac{\overline{M}_O\cdot\overline{R}}{|\overline{R}|}\cdot\dfrac{\overline{R}}{|\overline{R}|}=\dfrac{\overline{M}_O\cdot\overline{R}}{R^2}\cdot\overline{R}\end{cases}\tag{4.25}$$

Din expresiile (4.18) și (4.25) se constată că: dacă scalarul torsorului într-un punct oarecare O este nul, în punctul O_1 de pe axa centrală vectorul moment rezultant este nul.

4.4.2. Torsorul în raport cu un punct al unei singure forţe aplicatã unui solid rigid

Fie forța $\overline{F}$ aplicată unui solid rigid. Torsorul calculat în punctul O va avea forma:

$$T_O(\overline{F})\begin{cases}\overline{R}=\overline{F}\\ \overline{M}_O=\mathsf{M}_O\overline{F}\end{cases}\tag{4.26}$$

Deoarece $\mathcal{M}_O\overline{F}$ este perpendicular pe $\overline{F}$ scalarul torsorului este nul. În acest caz axa centrală coincide cu suportul rezultantei $\overline{R}$ și în orice punct al ei vectorul moment rezultant este nul.

4.4.3. Torsorul în raport cu un punct al unui cuplu de forţe aplicat unui solid rigid

Un cuplu de forțe este definit de două forțe egale, de sensuri opuse care au suporturile paralele, $\overline{F}'=-\overline{F}''$ (fig. 4.17).În acest caz vectorul rezultant este nul:

$$\overline{R}=\overline{F}'+\overline{F}''=0\,.\tag{4.27}$$

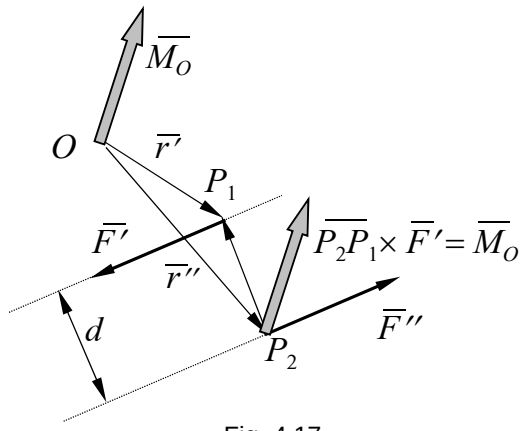


Fig. 4.17.

Vectorul moment rezultant calculat în punctul O este (fig. 4.17):

$$\overline{M}_O = \mathsf{M}_O\overline{F}' + \mathsf{M}_O\overline{F}'' = \overline{r}' \times \overline{F}' + \overline{r}'' \times \overline{F}'' = \overline{r}' \times \overline{F}' + \overline{r}'' \times (-\overline{F}') =$$
$$= (\overline{r}' - \overline{r}'') \times \overline{F}' = \overline{P_2P_1} \times \overline{F}' . \qquad (4.28)$$

Se constată că vectorul moment rezultant al unui cuplu de forțe nu depinde de punctul în raport cu care acesta se calculează. El este un vector liber, normal pe planul format de $\overline{P_2P_1}$ și $\overline{F}'$, adică pe planul cuplului, și are sensul astfel încât un om orientat după $\overline{M}_O$ să vadă sensul de rotație aparent al cuplului că rotește în sensul pozitiv ales. Norma vectorului moment rezultant este:

$$\left|\overline{M}_O\right| = \left|\overline{P_2P_1}\right| \cdot \left|\overline{F}'\right| \cdot \sin(\overline{P_2P_1}, \overline{F}') = d \cdot \left|\overline{F}'\right|, \qquad (4.29)$$

unde d este brațul cuplului și reprezintă distanta dintre suporturile forțelor cuplului.

4.4.4. Expresii analitice privind torsorul unui sistem de forţe

Se consideră sistemul trirectangular de referință $Oxyz$, cu versorii $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (fig. 4.18), față de care forțele $\overline{F}_i$ aplicate unui solid rigid au proiecțiile (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}), iar punctele lor de aplicație au coordonatele (x_i, y_i, z_i). În această situație torsorul sistemului de forța ($\overline{F}_i$) calculat în raport cu originea O a sistemului de referință (fig. 4.18) va avea următoarea formă:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=\overline{i}\sum_{i=1}^{n}F_{ix}+\overline{j}\sum_{i=1}^{n}F_{iy}+\overline{k}\sum_{i=1}^{n}F_{iz}\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i=\\ \quad=\overline{i}\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{iz}-z_iF_{iy})+\overline{j}\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{ix}-x_iF_{iz})+\overline{k}\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{iy}-y_iF_{ix})\end{cases}\tag{4.30}$$

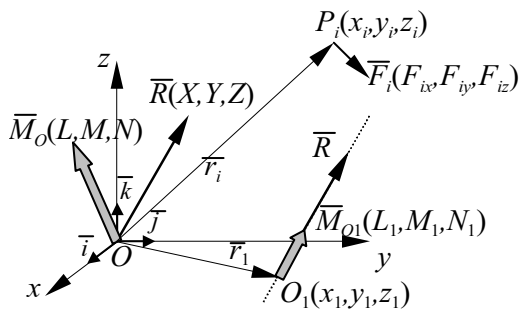


Fig. 4.18.

Așadar, cei doi vectori rezultanți ce alcătuiesc torsorul au următoarele componente:

– vectorul $\overline{R}$:

$$X=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}\ ;\quad Y=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}\ ;\quad Z=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}\ ;\tag{4.31}$$

– vectorul $\overline{M}_O$:

$$L=\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{iz}-z_iF_{iy})\,;\ M=\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{ix}-x_iF_{iz})\,;\ N=\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{iy}-y_iF_{ix})\,.\tag{4.32}$$

Scalarul torsorului va avea expresia:

$$\overline{M}_O\cdot\overline{R}=\overline{M}_{O_1}\cdot\overline{R}=LX+MY+NZ=L_1X+M_1Y+N_1Z\tag{4.33}$$

din care cauză el mai este denumit și *trinom invariant*.

Proiecția vectorului moment rezultant $\overline{M}_O$ pe direcția lui $\overline{R}$ etse:

$$\frac{\overline{M}\cdot\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|}=\frac{LX+MY+NZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\tag{4.34}$$

Vectorul moment rezultant, care are norma minimă, se determină cu expresia:

$$\overline{M}_{O_1} = \frac{\overline{M}\cdot\overline{R}}{R^2}\cdot\overline{R} = \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}(\bar{i}\,X+\bar{j}\,Y+\bar{k}\,Z) \qquad (4.35)$$

iar proiecțiile sale pe axele sistemului de referință sunt:

$$L_1 = \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}X;$$

$$M_1 = \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}Y; \qquad (4.36)$$

$$N_1 = \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}Z.$$

În baza relației (4.20) componentele L_1, M_1, N_1 mai pot fi scrise și astfel:

$$L_1 = L-(yZ-zY);\ \ M_1 = M-(zX-xZ);\ \ N_1 = N-(xY-yX). \qquad (4.37)$$

Din condiția de paralelism între vectorul moment rezultant $\overline{M}_{O_1}$ și vectorul rezultant $\overline{R}$ rezultă ecuațiile analitice ale axei centrale:

$$\frac{L_1}{X} = \frac{M_1}{Y} = \frac{N_1}{Z}$$

sau, sub altă formă

$$\frac{L-(yZ-zY)}{X} = \frac{L-(zX-xZ)}{Y} = \frac{N-(xY-yX)}{Z} \qquad (4.38)$$

Cele două ecuații liniare în (x, y, z) în care (X, Y, Z) și (L, M, N) sunt mărimi cunoscute, reprezintă ecuațiile axei centrale.

4.4.5. Invarianţa torsorului unui sistem de forţe în raport cu operaţiile elementare de echivalenţă

În baza proprietăților momentului unei forțe în raport cu un punct (v.par. 4.2), se poate dovedi ușor că aplicând operațiile elementare de echivalență torsorului unui sistem de forțe, (v. relația (4.1)) efectul său mecanic nu se modifică.

a) Introducerea (sau scoaterea) unor perechi de forțe egale și direct opuse

într-un sistem de forțe aplicate unui solid rigid nu modifică vectorul rezultant, deoarece suma forțelor egale și direct opuse este nulă, și nici vectorul moment rezultant nu se modifică întrucât momentele a două forțe egale și direct opuse sunt egale și direct opuse (v. proprietatea *d* din cadrul parag. 4.2.1).

b) Alunecarea unei forțe, din cadrul unui sistem de forțe aplicat unui solid rigid, pe suportul său nu modifică nici vectorul rezultant și nici vectorul moment rezultant, deoarece momentul forței respective nu se modifică (v. proprietatea *b* din cadrul parag. 4.2.1).

c) Înlocuirea unor forțe ce au suporturile concurente cu rezultanta lor sau înlocuirea unor forțe cu componentele acestora după direcții concurente cu suporturile lor, nu modifică vectorul rezultant, în baza proprietăților de distributivitate, respectiv asociativitate ale sumei vectoriale. Nici vectorul moment rezultant nu se schimbă în baza teoremei lui Varignon (v. proprietatea *e* din cadrul parag. 4.2.1).

Rezultă că torsorul unui sistem de forțe este un invariant față de operațiile elementare de echivalență.

4.5. RECUNOAŞTEREA EFECTULUI MECANIC AL UNUI SISTEM DE FORŢE APLICATE UNUI SOLID RIGID CU AJUTORUL TORSORULUI

Pentru a putea folosi torsorul unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid în aprecierea efectului mecanic al acestora, vom enunța, mai întâi, patru *leme* și două *teoreme*.

În baza principiului rigidității, două forțe egale și direct opuse, aplicate unui solid rigid, au efect mecanic nul. Ele formează un *sistem nul* deoarece vectorul rezultant este nul, suma lor fiind egală cu zero și, de asemenea, vectorul moment rezultant este nul în baza proprietății *d*) a momentului unei forțe în raport cu un punct. Rezultă că orice sistem de forțe care poate fi redus, prin operații elementare de echivalență la două forțe egale și direct opuse este un sistem nul. De aici se deduc lemele și teoremele de mai jos.

Lema 1. *Orice sistem nul are torsorul nul într-un punct.*

Lema 2. *Dacă un sistem de forțe are torsorul nul într-un punct, el are torsorul nul în oricare alt punct* (în baza proprietăților torsorului unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid (vezi par. 4.4.1, *a*).

Pe baza celor două leme rezultă:

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă ca un sistem de forțe aplicate unui solid rigid să formeze un sistem nul este ca torsorul acestuia să fie nul într-un punct.*

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=0\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i=0\end{cases} \tag{4.39}$$

Lema 3. *Sistemele de forțe care au același torsor într-un punct, au același torsor în oricare alt punct.*

Dacă, în punctul *O* cele două sisteme de forțe ($\overline{F}_i$) și ($\overline{F}_j$) au același torsor, adică:

$$\overline{R}=\overline{\mathrm{R}} \text{ și } \overline{M}_O=\overline{\mathrm{M}}_O,$$

rezultă că în *O′* ele vor avea:

$$\overline{R} = \overline{\mathrm{R}} \text{ și } \overline{M}_{O'} = \overline{\mathrm{M}}_{O'}, \tag{4.40}$$

deoarece vectorul rezultant este un invariant în raport cu punctul față de care se calculează torsorul, iar vectorul moment rezultant variază după legea (4.17).

Lema 4. *Sistemele de forțe echivalente au același torsor într-un punct.*

Această lemă este evidentă având în vedere invarianța torsorului unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid, în raport cu operațiile elementare de echivalență.

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă ca două sisteme de forțe, aplicate independent unui solid rigid, să fie echivalente este ca ele să aibă același torsor într-un punct*.

Această teoremă, numită și *teorema de echivalență*, este reciproca lemei 4 și este valabilă în cazul unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid.

Efectul mecanic al unui sistem de forțe aplicate unui solid rigid va fi cu atât mai ușor de recunoscut cu cât sistemul de forțe este mai simplu (are un număr mai mic de forțe). Deci, în baza teoremei de echivalență, este suficient să găsim un sistem de forțe care să aibă același torsor într-un punct cu sistemul de forțe dat, dar care să fie cât mai simplu posibil, pentru ca să putem evidenția efectul mecanic.

Determinarea sistemelor de forțe echivalente cu sistemul de forțe dat se va face cu ajutorul torsorului, care se dovedește a fi un operator ce se aplică sistemelor de forțe. S-a arătat că, cel mai simplu sistem de forțe este alcătuit din două forțe egale și direct opuse, efectul lor mecanic fiind nul.

a) Să presupunem că am calculat torsorul sistemului de forțe dat ($\overline{F}_i$) în punctul *O* și am obținut următorul torsor:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0 \\ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O \overline{F}_i = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

În acest caz sistemul de forțe dat este echivalent cu un sistem format din două forțe egale și direct opuse al căror efect mecanic este nul. Se spune că sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) se află în echilibru sau, nu atât de riguros, solidul rigid acționat de sistemul de forțe ($\overline{F}_i$), este în echilibru. În consecință, sistemul de forțe ($\overline{F}_i$) are efect mecanic nul asupra solidului rigid.

b) Dacă torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$), calculat în raport cu punctul *O* este:

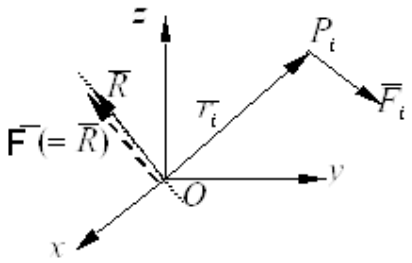


Fig. 4.19.

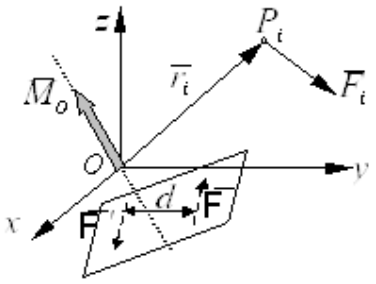


Fig. 4.20.

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\neq 0\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i=0\end{cases} \tag{4.42}$$

atunci sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu o singură forță $\overline{F}$, cu suportul trecând prin punctul *O*, cu mărimea scalară, sensul și direcția aceleași cu ale vectorului rezultant $\overline{R}$, adică $\overline{F}=\overline{R}$ (fig. 4.19).

c) Dacă torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$), calculat în raport cu punctul *O* este:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=0\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i\neq 0\end{cases} \tag{4.43}$$

atunci sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu un cuplu al cărui moment este egal cu ($\overline{M}_O$) alcătuit din două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ ($\overline{F}=-\overline{F}'$) situate într-un plan perpendicular pe suportul lui $\overline{M}_O$ la distanța $d=\left|\overline{M}_O\right|/\overline{F}$ (fig. 4.20).

Observație. Așa cum s-a arătat în paragraful 4.4.3 momentul rezultant al unui cuplu de forțe (două forțe egale ca mărime, de sensuri contrare și cu suporturile paralele) nu depinde de punctul în raport cu care el se calculează: este un vector liber, perpendicular pe planul definit de cuplu de forțe, având sensul astfel încât sensul aparent de rotire al cuplului de forțe să se vadă, de pe momentul rezultant, în sensul pozitiv ales. Mărimea scalară a vectorului rezultant este egală cu produsul dintre norma forței și brațul cuplului (distanța dintre suporturile forțelor cuplului).

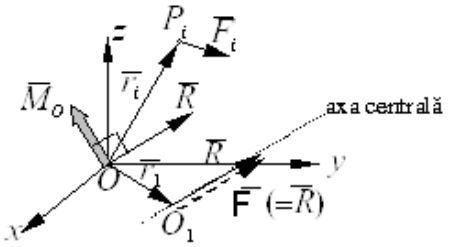


Fig. 4.21.

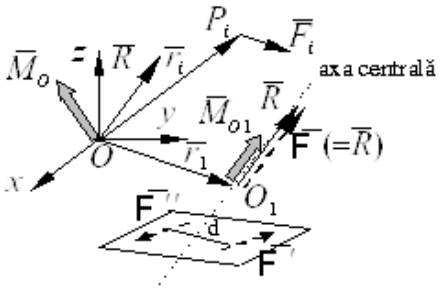


Fig. 4.22.

d) Dacă, în caz general:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\neq 0\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i\neq 0\end{cases} \tag{4.44}$$

atunci sunt în discuție două posibilități:

d_1) Scalarul torsorului este nul: $\overline{R}\cdot\overline{M}_O=0$, ceeace ne arată că $\overline{R}\perp\overline{M}_O$ și deci pr$(\overline{M}_O)\,\overline{R}=0$, norma minimă a vectorului rezultant $\overline{M}_{O_1}$ (unde O_1 este un punct ce aparține axei centrale) fiind în acest caz, nulă:

$$\left|\overline{M}_{O_1}\right|=\frac{\overline{M}\cdot\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|}=0. \tag{4.45}$$

În consecință, se spune că sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ al cărui suport este axa centrală (fig. 4.21).

d_2) Dacă însă $\overline{R}\cdot\overline{M}_o\neq 0$ avem cazul general când sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ (fig. 4.21) care are ca suport axa centrală și cu un cuplu de forțe dirijat de asemenea, după axa centrală, format din două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ $(\overline{F}=-\overline{F}')$ situate într-un plan perpendicular pe axa centrală la depărtarea $d=\left|\overline{M}_O\right|/\overline{F}$ una față de alta.

Aplicații

A.4.1. Fie forța $\overline{F}$ aplicată în punctul A cu mărimea $F = P\sqrt{6}$ (fig. 4.23). Se cere să se determine: a) momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O; b) momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa Δ.

a) Momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O.

Pentru determinarea componentelor forței $\overline{F}$ pe axele sistemului de referință se procedează astfel:

$$\overline{F} = F\,\frac{\overline{AD}}{\left|\overline{AD}\right|} = \frac{(0-a)\overline{i} + (0-2a)\overline{j} + (a-0)\overline{k}}{\sqrt{a^2+4a^2+a^2}} =$$

$$= P\sqrt{6}\,\frac{-a\overline{i} - 2a\overline{j} + a\overline{k}}{a\sqrt{6}} =$$

$$-P\overline{i} - 2P\,\overline{j} + P\overline{k}\,.$$

Conform definiției (4.1) :

$$\mathcal{M}_O\overline{F} = \overline{r} \times \overline{F} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 2a & 0 \\ -P & -2P & P \end{vmatrix} =$$

$$= 2Pa\,\overline{i} - Pa\,\overline{j}$$

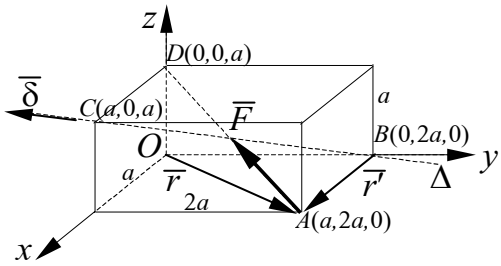


Fig. 4.23.

deoarece $\overline{r} = (a-0)\,\overline{i} + (2a-0)\,\overline{j} + (0-0)\,\overline{k} = a\,\overline{i} + 2a\,\overline{j}$.

Mărimea scalară a momentului $\mathcal{M}_O\overline{F}$ este: $\left|\,\mathcal{M}_O\overline{F}\,\right| = Pa\sqrt{5}$.

b) Momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa Δ.

Pentru aceasta se alege un punct de pe axa Δ. Fie acesta punctul B identificat de vectorul de poziție $\overline{r}'$.

Versorul $\overline{\delta}$ al axei Δ are următorii cosinuși directori: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ deoarece:

$$\overline{\delta} = 1\cdot\frac{\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{(a-0)\overline{i} + (0-2a)\overline{j} + (a-0)\overline{k}}{\sqrt{a^2+4a^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\overline{i} - 2\,\overline{j} + \overline{k}\right).$$

Conform definiției (4.11) și deoarece $\overline{r}' = a\,\overline{i}$ rezultă:

$$\mathcal{M}_\Delta \overline{F} = \overline{\delta}\cdot(\overline{r}' \times \overline{F}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ a & 0 & 0 \\ -P & -2P & P \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{6}} Pa$$

A.4.2. Fie sistemul de forțe din figura 4.24 cu $F_1 = P\sqrt{6}$; $F_2 = P\sqrt{2}$, $F_3 = P$. Să se determine: a) torsorul în raport cu originea sistemului de referință; b) torsorul în raport cu punctul A; c) torsorul minim; d) ecuația axei centrale; e) echivalența sistemului de forțe.

a) Pentru a calcula vectorul rezultant $\overline{R}$ trebuie mai întâi să determinăm proiecțiile forțelor $\overline{F}_i$ (i=1, 2, 3) pe axele sistemului de referință. Astfel:

$$\overline{F}_1 = F_1 \frac{\overline{EB}}{|\overline{EB}|} = P\sqrt{6}\,\frac{(a-0)\overline{i} + (2a-0)\overline{j} + (a-0)\overline{k}}{\sqrt{a^2+4a^2+a^2}} = P\overline{i} + 2P\overline{j} - P\overline{k}\,;$$

$$\overline{F}_3 = -F_3\overline{j} = -P\overline{j}$$

$$\overline{F}_2 = F_2 \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} =$$

$$= P\sqrt{2}\,\frac{(0-a)\overline{i} + (a-0)\overline{k}}{\sqrt{a^2+a^2}} =$$

$$= -P\overline{i} + P\overline{k}\,;$$

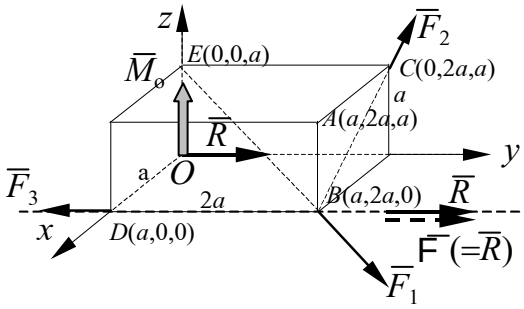


Fig. 4.24.

Aplicând prima relație din (4.30) rezultă: $\overline{R} = P\overline{j}$.

Conform relației (4.1) se obține:

$$\mathcal{M}_O \overline{F}_1 = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 = \overline{OB} \times \overline{F}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 2a & 0 \\ P & 2P & -P \end{vmatrix} = -2Pa\overline{i} + Pa\overline{j}\,;$$

$$\mathcal{M}_O \overline{F}_2 = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 = \overline{OC} \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 2a & a \\ -P & 0 & P \end{vmatrix} = 2Pa\overline{i} - Pa\overline{j} + 2Pa\overline{k}\,;$$

$$\mathcal{M}_O \overline{F}_3 = \overline{r}_3 \times \overline{F}_3 = \overline{OD} \times \overline{F}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} = -Pa\overline{k};$$

Prin aplicarea celei de a doua relații din (4.30) rezultă: $\overline{M}_O = Pa\overline{k}$. Deci torsorul sistemului de forțe dat, calculat față de punctul O, are expresia:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases} \overline{R} = P\overline{j} \\ \overline{M}_O = Pa\overline{k} \end{cases}$$

vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}_O$ fiind reprezentați în figura 4.24.

b) Pentru a calcula $\mathrm{T}_A(\overline{F}_i)$ trebuie să calculăm decât $\overline{M}_A$, deoarece vectorul rezultant este un invariant față de punctul în raport cu care se calculează torsorul.

Pentru calculul lui $\overline{M}_A$ se aplică relația (4.17) și se obține:

$$\overline{M}_A = \overline{M}_O + \overline{AO} \times \overline{R} = Pa\overline{k} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -a & -2a & -a \\ 0 & P & 0 \end{vmatrix} = Pa\overline{k} + Pa\overline{i} - Pa\overline{k} = Pa\overline{i}.$$

c) Aplicând relația (4.25) se obține:

$$T_{O_1}(\overline{F}_i)\begin{cases} \overline{R} = P\overline{j} \\ \overline{M}_{O_1} = 0 \end{cases}$$

deoarece produsul $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$.

d)Având în vedere că: $X = 0$, $Y = P$, $Z = 0$; $L = 0$, $M = 0$, $\mathrm{N} = Pa$, aplicând relația (4.38) se obține:

$$\frac{zP}{0} = \frac{0}{0} = \frac{Pa - xP}{0}$$

care conduce la următoarele ecuații $z = 0$ și $x = a$. Rezultă că axa centrală este o dreaptă cuprinsă în planul Oxy ($z = 0$) și paralelă cu axa Oy ce trece prin punctul $D(a, 0, 0)$ (este normal, deoarece $\overline{R}$ este dirijat după Oy, iar axa centrală este, prin definiție paralelă cu $\overline{R}$) (fig.4.24).

e) În urma determinării torsorului în raport cu punctul O s-a constatat că $\overline{R} \neq 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$. În acestă situație suntem în cazul *d*), relația (4.44). Deoarece $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$, rezultă că sistemul este echivalent cu o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ al cărui suport este axa centrală (vezi fig. 4.24).

Teste

T.4.1. Dacă într-un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) ce acționează asupra unui solid rigid se introduc două forțe egale ca mărime, paralele și de sensuri contrare atunci:

a) noul sistem de forțe are efect mecanic nul;
b) noul sistem de forțe are același efect mecanic cu cel inițial;
c) noul sistem de forțe are efect mecanic diferit de cel inițial;
d) noul sistem de forțe are torsorul nul.

T.4.2. Dacă forțele din figura 4.25 au $F_1 = F_2 = P\sqrt{6}$ și $\mathcal{M}_O\overline{F}_1 = = 2Pa\overline{i} - Pa\overline{k}$ atunci:

a) $\mathcal{M}_O\overline{F}_2 = -Pa\overline{i} - 2Pa\overline{j}$; *b*) $\mathcal{M}_O\overline{F}_2 = 2Pa\overline{i} - Pa\overline{k}$;
c) $\mathcal{M}_O\overline{F}_2 = -2Pa\overline{i} + Pa\overline{k}$; *d*) $\mathcal{M}_O\overline{F}_2 = 0$.

T.4.3. Dacă forța din figura 4.26 este $\overline{F} = -2P\overline{i} - P\overline{j} - 3P\overline{k}$ atunci momentul său în raport cu punctul A este:

a) $\mathcal{M}_A\overline{F} = 0$; *b*) $\mathcal{M}_A\overline{F} = -6Pa\,\overline{i} + 3Pa\,\overline{j} - 3Pa\,\overline{k}$;
c) $\mathcal{M}_A\overline{F} = -6Pa\,\overline{i} + 3Pa\,\overline{j} - Pa\,\overline{k}$; *d*) $\mathcal{M}_A\overline{F} = -3Pa\,\overline{i} + 6Pa\,\overline{j}$.

T.4.4. Forța $\overline{F}$ din figura (3) 4.27 are expresia $\overline{F} = -P\sqrt{10}\,\overline{i} - P\sqrt{10}\,\overline{j}$. Momentul acestei forțe în raport cu dreapta Δ este:

a) $\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = -2Pa$; *b*) $\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = 3Pa$;
c) $\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = -4Pa$; *d*) $\mathcal{M}_\Delta\overline{F} = -3Pa$.

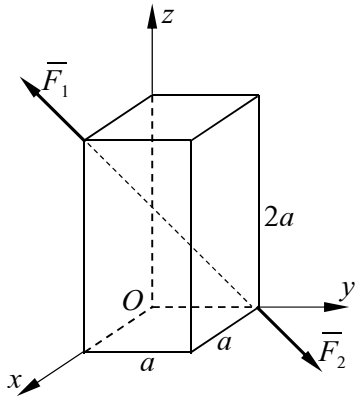


Fig. 4.25.

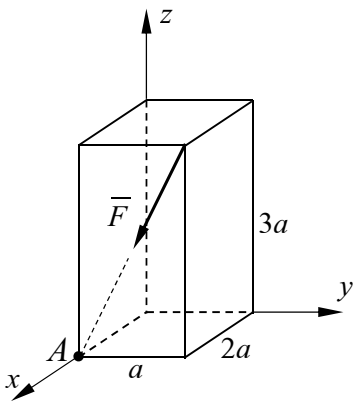


Fig. 4.26.

T.4.5. Torsorul sistemului de forțe din figura 4.28 calculat în raport cu originea sistemului de referință este: $T_O\left(\overline{F}_i\right)\begin{cases}\overline{R} = -P\overline{i} + 2P\overline{j} \\ \overline{M}_O = 2Pa\overline{k}\end{cases}$. Axa centrală a acestui sistem de forțe trece prin punctul de coordonate:

a) (a , $2a$, 0); *b*) (a , $2a$, $-a$);

c) ($-a$, $2a$, a); *d*) (a , $3a$, $-a$).

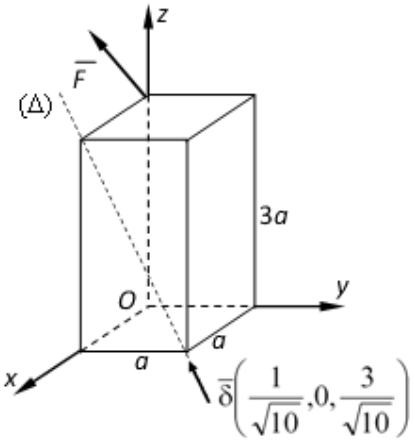


Fig. 4.27.

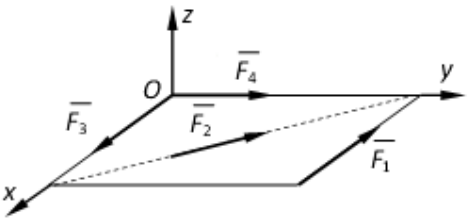


Fig. 4.28.

T.4.6. Un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) aplicat unui solid rigid are efect mecanic nul dacă:

a) vectorul rezultant $\overline{R} = 0$;

b) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) nu este nul într-un punct;

c) $\overline{M}_O = 0$;

d) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) este nul într-un punct.

T.4.7. Două sisteme de forțe ($\overline{F}_i$) și ($\overline{F}_j$) aplicate independent unui solid rigid sunt echivalente din punct de vedere mecanic dacă:

a) au același vector rezultant $\overline{R}$;

b) au torsoarele egale;

c) au, în același punct, torsoarele egale;

d) au același vector moment rezultant $\overline{M}_O$;

T.4.8. Torsorul unui sistem de forțe ($\overline{F}_i$) aplicat unui solid rigid calculat în raport cu originea sistemului de referință are expresia: $T_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 0\\ \overline{M}_O = 2Pa\overline{i}\end{cases}$. Cu cine este echivalent sistemul de forțe ($\overline{F}_i$)?

a) cu două forțe de mărime $F' = F'' = P$ situate într-un plan perpendicular pe axa *Ox*, la distanța $d = 2a$ una față de alta și al căror sens de rotația, în raport cu axa *Ox* este pozitiv;

b) cu două forțe de mărime $F' = F'' = 2P$ situate într-un plan perpendicular pe axa *Ox*, la distanța $d = 2a$ una față de alta și al căror sens de rotația, în raport cu axa *Ox* este pozitiv;

c) cu două forțe de mărime $F' = F'' = 2P$ situate într-un plan perpendicular pe axa *Ox*, la distanța $d = 2a$ una față de alta și al căror sens de rotația, în raport cu axa *Ox* este negativ;

d) cu două forțe de mărime $F' = F'' = P$ situate într-un plan perpendicular pe axa *Ox*, la distanța $d = 2a$ una față de alta și al căror sens de rotația, în raport cu axa *Ox* este negativ.

T.4.9. Torsorul unui sistem de forțe ($\overline{F}_i$) aplicat unui solid rigid calculat în raport cu punctul *B* de coordonate (*a*, 0, 2*a*) are expresia: $T_B(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = -Pa\overline{k}\end{cases}$. Torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) în punctul *C* de coordonate (0, *a*, 0) are forma:

a) $T_C(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = -4Pa\overline{j} + 3Pa\overline{k}\end{cases}$; *b*) $T_C(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = 4Pa\overline{i} + 3Pa\overline{k}\end{cases}$;

c) $T_C(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = -4Pa\overline{j} - 3Pa\overline{k}\end{cases}$; *d*) $T_C(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = 2P\overline{j}\\ \overline{M}_O = 4Pa\overline{i} - 3Pa\overline{k}\end{cases}$.

4.6. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE FORŢE APLICATE SOLIDULUI RIGID

S-a arătat că, pentru ca un sistem de forțe aplicate unui solid rigid să aibă efect mecanic nul este suficient ca torsorul lui într-un punct să fie nul (4.39).

Proiectând relațiile (4.39) pe axele unui sistem de referință (fig. 4.29) se obțin condițiile scalare de echilibru sub forma:

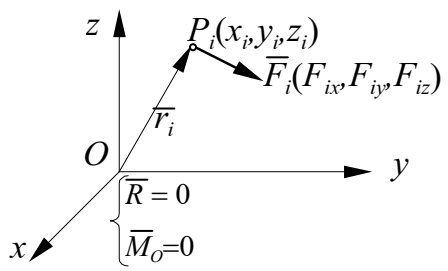


Fig. 4.29.

$$X=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}=0\ ;\ L=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}_{ox}\overline{F}_i=0;$$

$$Y=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}=0;\ M=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}_{oy}\overline{F}_i=0;$$

$$Z=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}=0;\ N=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}_{oz}\overline{F}_i=0; \tag{4.46}$$

care reprezintă trei condiții, privind proiecțiile forțelor pe axele sistemului de referință și trei condiții privind momentele forțelor în raport cu aceleași axe ale sistemului de referință.

Rezultă că în cazul general al unui solid rigid acționat de un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) condiția de echilibru se exprimă prin trei ecuații de proiecție și trei ecuații de moment în raport cu axele sistemului de referință ales.

4.7. SISTEME PARTICULARE DE FORŢE

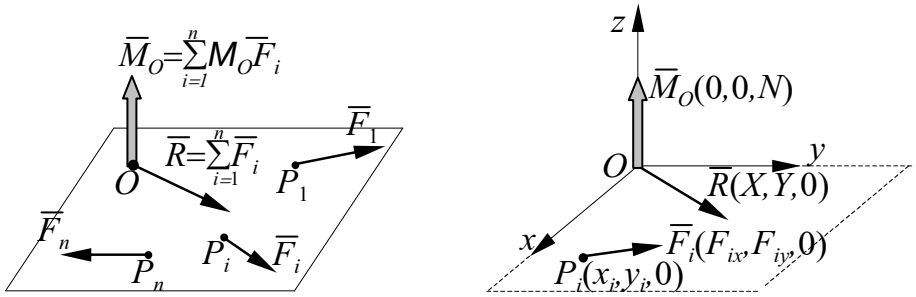
4.7.1. Sisteme de forţe coplanare

Atunci când toate forțele care alcătuiesc sistemul de forțe au suporturile cuprinse într-un plan ele alcătuiesc un *sistem de forțe coplanare* (fig. 4.30, *a*).

Se poate observa, că dacă, se alege în mod convenabil punctul *O*, în raport cu care se calculează torsorul, de exemplu în planul forțelor, atunci

vectorul moment rezultant $\overline{M}_O$ este întotdeauna perpendicular pe vectorul rezultant $\overline{R}$, care este cuprins în planul forțelor. Acest lucru se datorează faptului că forțele $\overline{F}_i$ nu dau moment în raport cu o axă cuprinsă în planul forțelor, suporturile lor ori intersectând axa, ori fiind paralele cu ea.

Rezultă că, în cazul general , când $\overline{R} \neq 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$, sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) este echivalent cu o singură forță $\overline{F}\,(=\overline{F}_i)$ dirijată după axa centrală, deoarece $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$.



a) b)

Fig. 4.30.

În rest, celelate cazuri de reducere ale unui sistem de forțe sunt identice cu cazurile *a*), *b*), *c*), de la paragraful 4.5. Se menționează numai că în cazul *b*), $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$, cele două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ ($\overline{F} = -\overline{F}'$), ce alcătuiesc cuplul de forțe, au suporturile cuprinse în planul forțelor ($\overline{F}_i$) la depărtarea $d = \overline{M}_O / \overline{F}$.

Din punct de vedere analitic, alegând în mod convenabil sistemul de referință cu axele Ox și Oy în planul forțelor, cotele z_i ale punctelor de aplicație P_i sunt nule, ca de altfel și proiecțiile F_{iz} ale oricărei forțe pe axa Oz (fig. 4.30, *b*).

În consecință :

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} \\ \overline{M}_O = N\overline{k}\end{cases} \tag{4.47}$$

în care:

$$X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\ ; \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\ ; \qquad N = \sum_{i=1}^{n}(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \tag{4.48}$$

Ecuațiile axei centrale (4.38) vor căpăta forma:

$$\frac{zY}{X}=\frac{-zX}{Y}=\frac{N-(xY-yX)}{0},$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} z=0 \\ N-(xY-yx)=0 \end{cases} \tag{4.49}$$

Relațiile (4.49) dovedesc, și pe cale analitică, că axa centrală este o dreaptă cuprinsă în planul *Oxy*, planul forțelor.

Condițiile de echilibru (4.46) pentru un sistem de forțe coplanar capătă forma:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\ ; \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \\ N &= \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0; \end{aligned} \tag{4.50}$$

fiind exprimate prin două ecuații de proiecție pe două axe perpendiculare între ele și cuprinse în planul forțelor și o ecuație de moment în raport cu o axă perpendiculară pe planul forțelor.

Condițiile de echilibru mai pot fi scrise și astfel;

– două ecuații de moment în raport cu două axe perpendiculare pe planul forțelor și o ecuație de proiecție pe axa ce unește punctele în care acestea înțeapă planul forțelor;

– trei ecuații de moment în raport cu trei axe, necoplanare, perpendiculare pe planul forțelor .

4.7.2. Sisteme de foţe paralele

Atunci când toate forțele ce alcătuiesc sistemul de forțe dat ($\overline{F}_i$) au suporturile paralele între ele, ele alcătuiesc un *sistem de forțe paralele* (fig. 4.31).

Dacă $\overline{u}$ este versorul direcției forțelor, se poate scrie $\overline{F}_i = F_i\overline{u}$ și în consecință:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)\begin{cases}\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=\overline{u}\sum_{i=1}^{n}F_i\\ \overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_O\overline{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{u}F_i=(\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i)\times\overline{u}\end{cases}\tag{4.51}$$

Rezultă de aici că $\overline{M}_O$ este perpendicular pe $\overline{u}$ și deci perpendicular pe $\overline{R}$, adică: $\overline{M}_O\cdot\overline{R}=0$, ceea ce face ca în cazul general când: $\overline{R}\neq 0$ și $\overline{M}_O\neq 0$, sistemul de forțe dat să fie echivalent cu o forță $\overline{F}$ ($=\overline{R}$) dirijată după axa centrală.

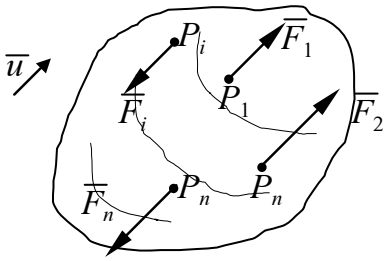


Fig. 4.31.

Pentru a determina axa centrală, etse suficient a identifica un punct de pe ea, știind că axa centrală este paralelă cu $\overline{R}$. Plecând de la relația (4.20), în cazul sistemului de forțe paralele $\overline{M}_{O_1}=0$ și ținând seama de (4.51) se obține:

$$\overline{M}_{O_1}=\overline{M}_O+\overline{O_1O}\times\overline{R}=(\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i)\times\overline{u}-\overline{r}_1\times\overline{u}\sum_{i=1}^{n}F_i=$$

$$=[\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i-\overline{r}_1\sum_{i=1}^{n}F_i]\times\overline{u}=0\tag{4.52}$$

Soluția particulară $\overline{\rho}$, pentru $\overline{r}_1$, este cea care anulează vectorul din paranteza pătrată, adică:

$$\overline{\rho}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}.\tag{4.53}$$

Vectorul $\overline{\rho}$ definește un punct C care aparține axei centrale, denumit *centrul forțelor paralele* și care are următoarele proprietăți:

a) nu depinde de direcția $\overline{u}$ a forțelor paralele;

b) depinde de $\overline{r}_i$, deci de punctele de aplicație P_i ale forțelor $\overline{F}_i$ (poziția centrului C se schimbă dacă forțele $\overline{F}_i$ lunecă pe suportul lor);

c) nu depinde de raportul dintre mărimile forțelor, rămâne același dacă forțele scad sau cresc în intensitate în același raport.

Proprietățile *a*) și *b*) îi conferă punctului *C* următoarea proprietate: dacă toate forțele $\overline{F}_i$ se rotesc în același sens cu același unghi, punctul *C* nu-și schimbă poziția, iar axa centrală se rotește în jurul lui cu același unghi și în același sens cu rotirea forțelor $\overline{F}_i$ (fig. 4.32).

Din această cauză, punctul *C* este denumit uneori (impropriu) "punctul de aplicație al rezultantei $\overline{R}$".

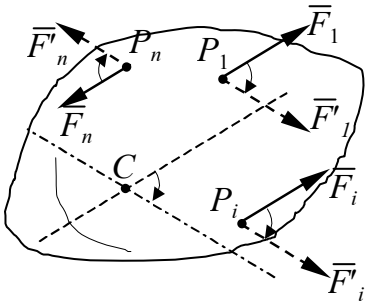


Fig. 4.32.

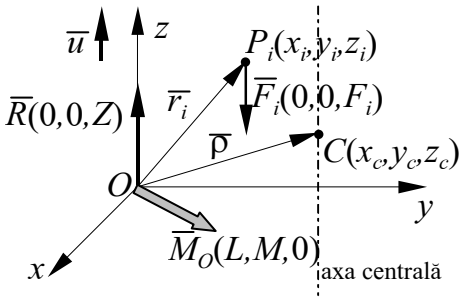


Fig. 4.33.

Un sistem de forțe paralele poate fi echivalenrt cu:

a) un sistem nul, dacă $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_O = 0$;

b) o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ aplicată în punctul *O* dacă $\overline{R} \neq 0$ și $\overline{M}_O = 0$;

c) un cuplu format din două forțe $\overline{F}$ și $\overline{F}'$ $(\overline{F} = -\overline{F}')$, situate într-un plan perpendicular pe direcția lui $\overline{M}_O$, la depărtarea $d = \left|\overline{M}_O\right| / \overline{F}$, dacă $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$;

d) cu o forță $\overline{F}$ $(=\overline{R})$ dirijată după axa centrală, în cazul general când $\overline{R} \neq 0$ și $\overline{M}_O \neq 0$, deoarece, după cum s-a arătat $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$.

Pentru exprimarea analitică a torsorului $\mathrm{T}_O(\overline{F}_i)$ se alege în mod convenabil sistemul de referință astfel ca $\overline{u} \,||\, \overline{k}$ (fig. 4.33). Se obține:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i) \begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{k} \sum_{i=1}^{n} F_i \\ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O \overline{F}_i = \overline{i} \sum_{i=1}^{n} (y_i F_i) - \overline{j} \sum_{i=1}^{n} (x_i F_i) \end{cases} \tag{4.54}$$

Rezultă deci:

$$X = 0\ ; \qquad Y = 0; \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} F_i\ ;$$
$$L = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i\ ; \quad M = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i\ ; \quad N = 0. \tag{4.55}$$

Dacă $\overline{\rho} = x_C \overline{i} + y_C \overline{j} + z_C \overline{k}$, prin proiectarea relației (4.53) pe axele sistemului de referință *Oxyz* (fig. 4.33) se obțin coordonatele punctului *C*:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \tag{4.56}$$

Prin definiție produsul dintre intensitatea unei forțe și distanța de la punctul ei de aplicație la un plan dat, se numește *moment static* al forței în raport cu acel plan.

Teorema momentelor statice. Suma momentelor statice față de un plan oarecare a forțelor unui sistem de forțe paralele este egală cu momentul static – față de același plan – al forței echivalente, considerată ca o forță efectiv aplicată în centrul forțelor paralele. În baza relațiilor (4.56) se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i F_i = x_C F\ ; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i F_i = y_C F\ ; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i F_i = z_C F\ . \tag{4.57}$$

În relațiile (4.57) produsele: x_iF_i, y_iF_i, z_iF_i reprezintă momentele statice ale forței $\overline{F}_i$ în raport cu planul *yOz*, *zOx*, respectiv *xOy*, iar $\overline{F}$ $(=R=\sum_{i=1}^{n} F_i)$ reprezintă intensitatea forței echivalente.

Condiția de echilibru pentru un sistem de forțe paralele este exprimată printr-o ecuație de proiecție și două ecuații de moment:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0; \quad L = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i = 0; \quad M = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i = 0. \tag{4.58}$$

In cadrul sistemelor de forțe aplicate solidului rigid, sistemele de forțe paralele reprezintă un caz particular de forțe, foarte des întâlnit în practică. Modelarea cea mai des întâlnită a unui sistem de forțe paralele o reprezintă

cazul sistemului de forțe generate asupra unui solid rigid de atracția exercitată de către pământ asupra acestuia.

4.8. CENTRE DE GREUTATE

Fie un sistem discret de puncte materiale situate la suprafața pământului. Asupra fiecărui punct va acționa forța de atracție a pământului. Dacă domeniul în care se află punctele materiale are dimensiuni mici în comparație cu cele ale pământului atunci se poate considera că toate forțele de greutate (forțele de atracție exercitate de pământ) formează un sistem de forțe paralele (fig. 4.34).

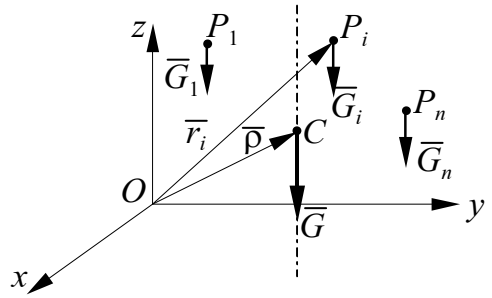


Fig. 4.34.

Prin definiție centrul de greutate al sistemului de puncte materiale prezentat anterior este considerat a fi identic cu centrul forțelor paralele provenite din forțele de greutate.

În consecință, poziția lui, dată de vectorul $\overline{\rho}$, se determină cu relația (4.53).

Deoarece s-a pus condiția ca domeniul în care sunt dispuse punctele materiale să fie restrâns ca dimensiuni, accelerația gravifică poate fi considerată ca fiind constantă și deci $\overline{G}_i = m_i \overline{g}$.

Rezultă:

$$\overline{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i m_i g}{\sum_{i=1}^{n} m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i m_i}{M}, \qquad (4.59)$$

în care: $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ reprezintă masa totală a sistemului de puncte materiale.

Analitic, coordonatele centrului de greutate față de un sistem de referință trirectangular se determină cu relațiile:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{M}. \tag{4.60}$$

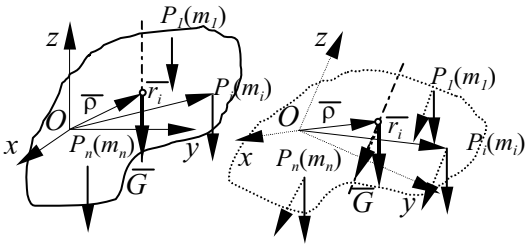


Fig. 4.35.

Din relațiile (4.59) și (4.60) și având în vedere proprietățile centrului forțelor paralele, rezultă următoarele observații:

– centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale este un centru de masă, întrucât poziția sa nu depinde de intensitatea accelerației gravitaționale (v. relația (4.59));

– dacă sistemul de puncte materiale se consideră "înghețat" sau este un sistem rigid, poziția centrului de greutate a acestuia rămâne neschimbată față de un reper solidar legat de sistemul de puncte materiale (fig. 4.35). S-a arătat că dacă toate forțele, ce alcătuiesc sistemul de forțe paralele, se rotesc, în jurul punctelor lor de aplicație, în același sens și cu același unghi atunci poziția centrului forțelor paralele nu se modifică în raport cu un sistem de referință solidar legat de solidul rigid.

4.8.1. Centrul de greutate al unui solid rigid

În cazul unui solid rigid definit ca un continuum, vectorul $\overline{\rho}$ este dat de relația (4.53) prin trecere la limită (fig. 4.36):

$$\overline{\rho} = \frac{\int_{(D)} \overline{r}\,\mathrm{d}m}{\int_{(D)} \mathrm{d}m} = \frac{\int_{(D)} \overline{r}\,\mathrm{d}m}{M}. \tag{4.61}$$

Coordonatele punctului C sunt date, în acest caz de relațiile:

$$x_C = \frac{\int_{(D)} x\,\mathrm{d}m}{M}; \quad y_C = \frac{\int_{(D)} y\,\mathrm{d}m}{M}; \quad z_C = \frac{\int_{(D)} z\,\mathrm{d}m}{M} \tag{4.62}$$

în care (x, y, z) reprezintă coordonatele unui punct curent P de masă dm al solidului rigid.

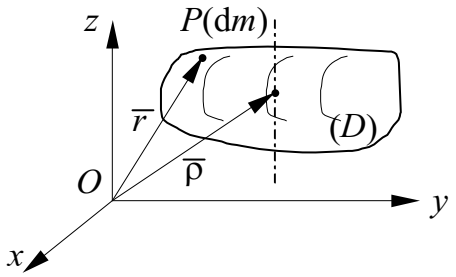


Fig. 4.36.

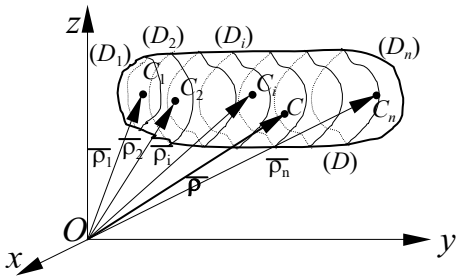


Fig. 4.37.

Din cele prezentate rezultă că centrul de greutate al unui solid rigid este o caracteristică fizico-geometrică a acestuia, el depinzând de configurația lui geometrică, precum și de distribuția masei în această configurație.

Cazuri particulare. a) Dacă domeniul (D) poate fi împărțit în n subdomenii (D_i), pentru care se cunosc masele M_i și centrele de greutate ale lor, C_i, prin vectorii de poziție $\overline{\rho}_i$, poziția centrului de masă al domeniului (D) se determină cu relația (fig. 4.37):

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{\rho}_1 M_1 + \overline{\rho}_2 M_2 + \ldots + \overline{\rho}_i M_i + \ldots}{M_1 + M_2 + \ldots + M_i + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_i M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_i M_i}{M} \qquad (4.63)$$

deoarece, în baza relației (4.61) :

$$\overline{\rho}_i = \frac{\int_{(D_i)} \overline{r}\,\mathrm{d}m}{\int_{(D_i)} \mathrm{d}m} = \frac{\int_{(D_i)} \overline{r}\,\mathrm{d}m}{M}. \qquad (4.64)$$

Pe baza relațiilor (4.63) se determină coordonatele centrului de masă al rigidului (D):

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ci} M_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ci} M_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{ci} M_i}{M}. \qquad (4.65)$$

b) Dacă corpul prezintă un plan de simetrie fizico-geometrică, centrul de greutate al corpului se află în acel plan (fig. 4.38):

$$z_C = \frac{\int\limits_{(D)} z\mathrm{d}m}{M} = \frac{\int\limits_{(D_1)} z\mathrm{d}m + \int\limits_{(D_2)} (-z)\mathrm{d}m}{M} = 0. \tag{4.66}$$

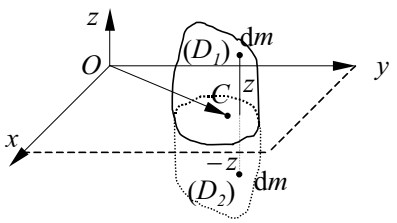


Fig. 4.38.

În mod analog:

– când corpul admite două plane de simetrie, adică o axă de simetrie, centrul de greutate se află pe acea axă;

– când corpul admite două axe de simetrie, centrul de greutate se află la intersecția celor două axe.

c) Dacă corpul este omogen, adică masa specifică medie (densitatea medie) γ este aceeași în tot domeniul ocupat de corp V, atunci $\mathrm{d}m = \gamma \mathrm{d}V$:

$$\bar{\rho} = \frac{\int\limits_{(D)} \bar{r}\gamma \mathrm{d}V}{\int\limits_{(D)} \gamma \mathrm{d}V} = \frac{\int\limits_{(V)} \bar{r}\mathrm{d}V}{\int\limits_{(V)} \mathrm{d}V} = \frac{\int\limits_{(V)} \bar{r}\mathrm{d}V}{V}. \tag{4.67}$$

d) Dacă corpul are două dimensiuni cu mult mai mari decât a treia, atunci el este identificat ca *placă*. Dacă placa este omogenă atunci $\mathrm{d}m = \gamma_S \mathrm{d}A$ și:

$$\bar{\rho} = \frac{\int\limits_{(D)} \bar{r}\gamma_S \mathrm{d}A}{\int\limits_{(D)} \gamma_S \mathrm{d}A} = \frac{\int\limits_{(A)} \bar{r}\mathrm{d}A}{\int\limits_{(A)} \mathrm{d}A} = \frac{\int\limits_{(A)} \bar{r}\mathrm{d}A}{A}, \tag{4.68}$$

unde A este suprafața totală a plăcii, iar γ_S – masa specifică superficială (densitatea superficială).

e) Dacă corpul are o dimensiune cu mult mai mare decât celelalte două, atunci el este identificat ca *bară*. Dacă bara este omogenă $\mathrm{d}m = \gamma_L \mathrm{d}l$ și:

$$\overline{\rho} = \frac{\int\limits_{(D)} \overline{r}\gamma_L \mathrm{d}l}{\int\limits_{(D)} \gamma_L \mathrm{d}l} = \frac{\int\limits_{(L)} \overline{r}\mathrm{d}l}{\int\limits_{(L)} \mathrm{d}l} = \frac{\int\limits_{(L)} \overline{r}\mathrm{d}l}{L}, \tag{4.69}$$

unde L este lungimea totală a barei, iar γ_L – masa specifică liniară (densitatea liniară).

Aplicații.

A.4.3. Să se determine centrul de greutate al unei bare omogene sub formă de arc de cerc cu raza R, cu un unghi la centru 2α (fig. 4.39).

Bara omogenă admite o axă de simetrie și deci, centrul de greutate se va afla pe acea axă (fig. 4.39). În conformitate cu sistemul de referință ales, va trebui calculată numai coordonata y_C. Alegând ca parametru unghiul θ, se paote vedea ușor că $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$ și $y = R\cos\theta$. Aplicând relația (4.69) se obține:

$$y_C = \frac{\int\limits_{(L)} y\mathrm{d}l}{\int\limits_{(L)} \mathrm{d}l} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\theta \cdot R\mathrm{d}\theta}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\mathrm{d}\theta} = R\frac{\sin\theta\big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta\big|_{-\alpha}^{\alpha}} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{4.70}$$

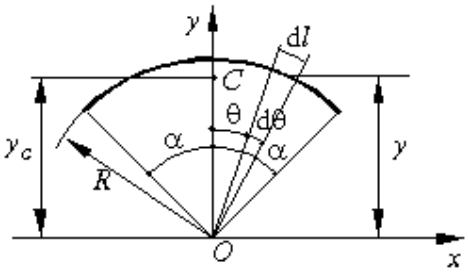


Fig. 4.39.

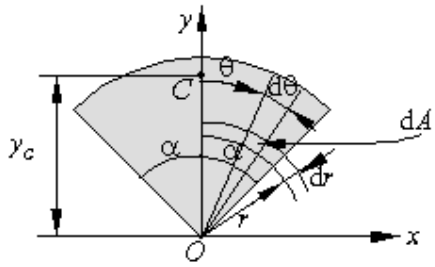


Fig. 4.40.

A.4.4. Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene sub forma unui sector de cerc de rază R și unghi la centru 2α (fig.4.40).

Adoptând sistemul de referință din figura 4.40 și ca parametri unghiul θ și raza r se poate scrie: $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ și $y = = r\cos\theta$.

În această situație :

$$y_C = \frac{\int\limits_{(A)} y\mathrm{d}A}{\int\limits_{(A)} \mathrm{d}A} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_{0}^{R} r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_{0}^{R} r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{4.71}$$

A.4.5. Să se determine centrul de greutate al plăcii plane omogene prezentate în figura 4.41.

Se alege sistemul de referință din figura 4.41 și se împarte suprafața plăcii în subdomenii pentru care se cunoaște poziția centrului de greutate. Astfel, pentru sectorul circular distanța OC_1 se determină cu relația (4.71):

$$OC_1 = \frac{2}{3}a\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi},$$

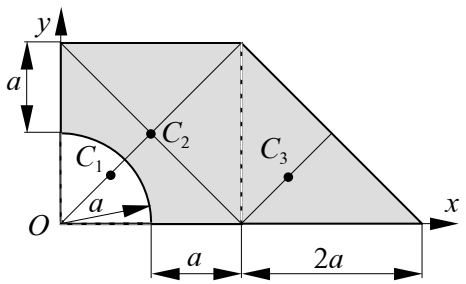


Fig.4.41.

centrul de greutate C_2, al pătratului, se află la intersecția diagonalelor, iar centrul de greutate C_3, al triunghiului se află la o treime de bază și două treimi de vârf .

Aplicând relațiile (4.63), în cazul plăcilor plane omogene, coordonatele centrului de greutate C se calculează cu relațiile:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i};\ y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i};\ z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}. \tag{a}$$

În cazul problemei date, $n = 3$. Pentru ușurința calculului se lucrează

Subdomeniu	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
C_1	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{\pi a^2}{4}$	$-\frac{a^3}{3}$	$-\frac{a^3}{3}$
C_2	a	a	$4a^2$	$4a^3$	$4a^3$
C_3	$2a+\frac{a}{3}$	$\frac{2a}{3}$	a^2	$2a^3+\frac{a^3}{3}$	$\frac{2a^3}{3}$
		$\sum$	$(5-\frac{\pi}{4})\,a^2$	$6a^3$	$\frac{13}{3}a^3$

tabelar:

Efectuând sumele (a) se obține:

$$x_C = \frac{6a^3}{(5-\frac{\pi}{4})a^2} = 1{,}42a; \quad y_C = \frac{\frac{13}{3}a^3}{(5-\frac{\pi}{4})a^2} = 1{,}03a; \quad z_C = 0.$$

Teste.

T.4.10. Dacă toate forțele $\overline{F}_i$ din cadrul sistemului de forțe oarecare ($\overline{F}_i$) aplicate unui solid rigid sunt rotite în jurul punctelor lor de aplicație în același sens și cu același unghi, atunci:

a) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) este minimal;

b) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) nu se modifică;

c) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) se modifică;

d) torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) este nul;

T.4.11. Vectorul $\overline{\rho}$, care definește centrul forțelor paralele, are următoarele proprietăți:

a) nu se modifică dacă forțele $\overline{F}_i$, ce alcătuiesc sistemul de forțe paralele, lunecă pe suporturile lor;

b) nu depinde de direcția forțelor paralele;

c) nu depinde de intensitatea forțelor $\overline{F}_i$;

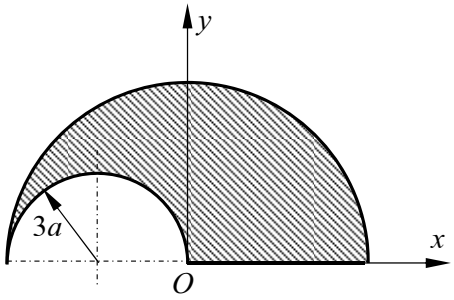


Fig. 4.42.

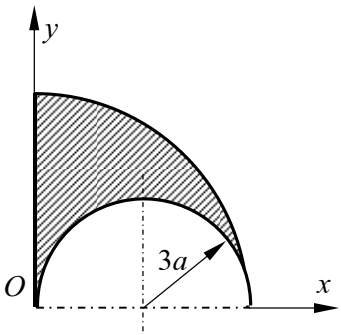


Fig. 4.43.

d) nu depinde de configurația sistemului de forțe ($\overline{F}_i$).

T.4.12. Pentru placa omogenă din figura 4.42 coordonata y_C a centrului de greutate este:

a) $y_C = 28a/3\pi$; *b*) $y_C = -27a/3\pi$;

c) $y_C = -26a/3\pi$; *d*) $y_C = 25a/3\pi$;

T.4.13. Pentru placa omogenă din figura 4.43 coordonata y_C a centrului de greutate este:

a) $y_C = a/\pi$; *b*) $y_C = -12a/\pi$;
c) $y_C = -3a/\pi$; *d*) $y_C = 12a/\pi$;

T.4.14. Condiția de echilibru pentru un sistem de forțe ($\overline{F_i}$) coplanare aplicate unui solid rigid, se exprimă prin:

a) două ecuații de proiecție în raport cu două axe perpendiculare cuprinse în planul forțelor și o ecuație de moment în raport cu o axă perpendiculară pe planul forțelor;

b) două ecuații de proiecție în raport cu două axe perpendiculare cuprinse în planul forțelor și o ecuație de moment în raport cu o axă cuprinsă în planul forțelor;

c) două ecuații de moment în raport cu două axe perpendiculare pe planul forțelor și o ecuație de proiecție în raport cu o axă din planul forțelor;

d) două ecuații de moment în raport cu două axe perpendiculare pe planul forțelor și o ecuație de proiecție în raport cu axa definită de punctele în care axele înțeapă planul forțelor.

T.4.15. Centrul de greutate al unei jumătăți de sferă omogene de rază *R* (fig. 4.44) se află la:

a) $3R/7$ de punctul *O* pe axa *Oy*;
b) $3R/8$ de punctul *O* pe axa *Oy*;
c) $3R/5$ de punctul O pe axa *Oy*;
d) $3R/6$ de punctul O pe axa *Oy*.

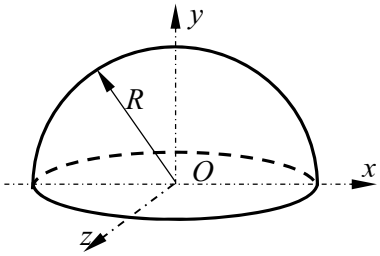


Fig. 4.44.

4.9. ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID ACŢIONAT DE FORŢE

S-a arătat că interacțiunea dintre corpuri se poate manifesta prin contact direct sau "la distanță". Acțiunea forțelor "la distanță" se exercită asupra fiecărei particule materiale din care este alcătuit corpul, proporțional cu masa acestuia. Din această cauză aceste forțe se mai numesc și masice. Forțele "de contact" se manifestă numai în punctele de contact ale corpului cu alte corpuri, deci în punctele de pe suprafață.

4.9.1. Corp liber şi corp legat. Grade de libertate

Un corp material, un solid rigid, este liber când se poate mișca oricum în spațiu sub acțiunea forțelor aplicate asupra lui.

Corpul legat este corpul a cărui mișcare mecanică este stânjenită de alte corpuri, prin anumite restricții de natură geometrică, denumite legături.

Corpurile de referință sunt acele corpuri care sunt legate solidar de sistemul de referință. Cu alte cuvinte, corpurile de referință nu își modifică în timp poziția față de sistemul de referință. Legăturile dintre corpul a cărui mișcare mecanică se studiază și corpurile de referință sunt numite *legături exterioare*. Dacă avem mai multe corpuri ce interacționează între ele și în același timp cu corpurile de referință, legăturile dintre ele sunt numite *legături interioare*.

Un corp material solid liber are *șase* grade de libertate cinematică, adică sunt necesari *șase* parametri pentru a-i defini poziția față de un sistem de referință. Dacă se aleg trei puncte necolineare ce aparțin solidului rigid: P_1, P_2, P_3, se poate constata că ele definesc $3 \times 3 = 9$ parametri pentru identificarea pozițiilor lor față de reperul considerat (fig. 4.45).

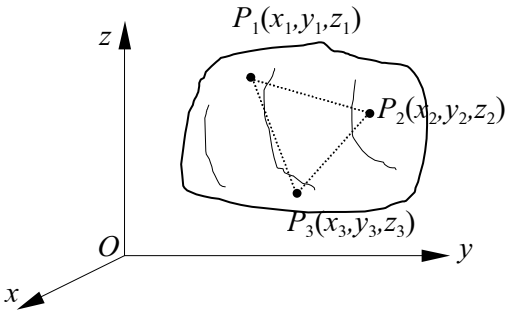


Fig. 4.45.

Pe de altă parte, deoarece, corpul material este considerat ca solid rigid, distanțele $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_1}$ rămân constante. Din această cauză, între cei nouă parametri apar trei relații de legătură de forma:

$$\left|\overline{P_iP_j}\right| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}\ ; \quad i,j = 1,2,3 \text{ cu } i \neq j. \qquad (4.72)$$

Rămân deci numai *șase* parametri independenți care determină poziția solidului rigid.

Cei șase parametri independenți, ce pot fi notați generic q_i (i=1,2,...,6) poartă denumirea de *coordonate generalizate* ale corpului.

4.9.2. Echilibrul solidului rigid liber

Un corp solid rigid liber se află în echilibru, sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci când el nu-și modifică starea de repaus pe care o avea față de un reper oarecare înainte de aplicarea sistemului de forțe.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un corp solid liber să rămână în echilibru când asupra lui acționează un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) (i=1,2,...,n) este ca sistemul de forțe dat să fie echivalent cu un sistem de forțe nul. Aceasta condiție este îndeplinită atunci când torsorul sistemului de forțe ($\overline{F}_i$) este nul într-un punct (vezi (4.39)).

Condițiile vectoriale (4.39) se exprimă analitic prin trei ecuații de proiecție și trei ecuații de moment conform relațiilor (4.46).

Dacă sistemul de forțe ($\overline{F}_i$) este un sistem de forțe coplanare, condițiile vectoriale (4.39) se exprimă conform celor prezentate în paragraful 4.7.1.

Ecuațiile prin care se pune condiția de torsor nul, al unui sistem de forțe ce acționează asupra unui solid rigid, poartă numele de *ecuații de echilibru*.

În cazul problemei directe, atunci când sistemul de forțe ($\overline{F}_i$) este precizat și se cere să se determine poziția de echilibru, problema este static determinată deoarece, în cazul unui sistem de forțe oarecare în spațiu, numărul ecuațiilor de echilibru (șase) este egal cu numărul necunoscutelor (șase) ce determină poziția de echilibru.

În cazul problemei indirecte, atunci când se cunoaște poziția de echilibru a solidului rigid și se cere să se determine sistemul de forțe ($\overline{F}_i$) sub acțiunea căruia corpul rămâne în repaus în poziția dată, problema este static nedeterminată, numărul necunoscutelor fiind mai mare decât cel al ecuațiilor. Problema poate deveni static determinată dacă sistemului de forțe

($\overline{F}_i$) i se impune un număr de condiții, sub forma unor relații fizice, astfel încât aceste relații, împreună cu ecuațiile de echilibru să formeze un sistem rezolvabil.

4.9.3. Echilibrul solidului rigid legat

Anterior s-a arătat că un corp solid legat are mișcarea îngrădită de o serie de restricții de natură geometrică impuse corpului de legăturile acestuia cu alte corpuri.

De asemenea, s-a precizat faptul că orice legătură poate fi înlocuită printr-o forță, numită forță de legătură. În felul acesta corpul devine liber, dar rămâne cu restricțiile geometrice impuse de legături. Rezultă, că forțele de legătură nu pot fi introduse oricum, ele trebuie să îndeplinească anumite condiții, care la rîndul lor să reflecte restricțiile impuse de legături.

Problema echilibrului solidului rigid acționat de un sistem de forțe ($\overline{F}_i$) cuprinde trei aspecte:

a) După înlociurea legăturilor prin forțe de legătură corpul devine liber și sub acțiunea forțelor efectiv aplicate $\overline{F}_i^a$ ($i = 1,2,...,n$) și de legătură $\overline{F}_j^l$ (j=1,2,...,m), este în echilibru dacă torsorul forțelor, în ansamblu, este nul într-un punct:

$$\mathrm{T}_O(\overline{F}_i^a, \overline{F}_j^l)\begin{cases} \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^a + \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_j^l = 0 \\ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_O \overline{F}_i^a + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{M}_O \overline{F}_j^l = 0 \end{cases} \tag{4.73}$$

Relația (4.73) constituie *aspectul static* al problemei și conduce la scrierea ecuațiilor de echilibru.

b) Restricțiile de natură geometrică impuse de legături sunt exprimate, explicit sau implicit, de un număr oarecare de relații geometrice între coordonatele generalizate q_i ale corpului, aceste relații constituind *aspectul geometric* al problemei.

c) *Aspectul fizic* al problemei constă în condițiile de natură fizică pe care trebuie să le îndeplinească forțele de legătură pentru a respecta restricțiile geometrice impuse de legături.

Ecuațiile de echilibru împreună cu relațiile geometrice și cu condițiile fizice trebuie să constituie un sistem complet de ecuații în care, necunoscutele trebuie să fie egale, ca număr, cu ecuațiile sistemului.

De remarcat este faptul că, în cazul corpului legat, problema se prezintă

atât sub aspectul direct cât și indirect. Acest lucru face ca necunoscutele să se împartă în necunoscute geometrice, referitoare la parametrii corespunzători gradelor de libertate rămase corpului solid (pe care le vom numi *necunoscute principale*) și în necunoscute fizice, referitoare la caracteristicile forțelor de legătură (pe care le vom numi *necunoscute secundare*).

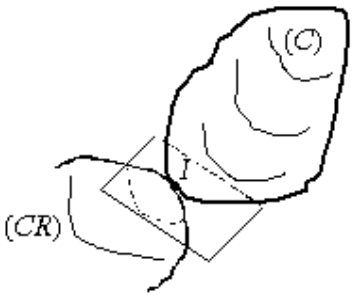


Fig. 4.46.

Când corpul solid supus la legături nu are nici-un grad de libertate atunci se spune că el are legături complete. În acest caz problema se pune sub formă indirectă și ea este static determinată. Dacă însă corpul are legături mai multe decât îi sunt necesare pentru a rămâne fără nici un grad de libertate, problema devine static nedeterminată. Rezolvarea problemei, în acest caz, se face cu ajutorul relațiilor furnizate de mecanica aplicată.

Pentru a putea preciza condițiile pe care să le îndeplinească forțele de legătură, impuse de principiul forțelor de legătură, trebuie cunoscute și studiate tipurile de legături pe care un solid rigid le poate avea.

4.10. LEGĀTURILE SOLIDULUI RIGID

Un solid rigid poate avea următoarele tipuri de legături simple: reazem simplu, articulație, și încastrarea.

Dacă corpul solid are mai multe legături se spune despre el că are legături multiple.

4.10.1. Reazemul simplu punctiform

Un solid rigid se reazemă simplu pe un alt corp atunci când are un singur punct de contact cu acesta (fig. 4.46).

Din punctul de vedere al gradelor de libertate, reazemul simplu punctiform împiedică deplasarea corpului (*C*) după direcția normală la planul tangent comun în punctul *I* la cele două corpuri.

Punctul *I* se numește punct teoretic de contact, deoarece atât corpul (*C*) cât și corpul de referință (*CR*) sunt considerate, în mecanica teoretică, rigide

perfecte. În realitate însă, contactul dintre cele două corpuri are loc pe o mică suprafață datorită deformabilității (reale) a corpurilor în zona de contact (fig. 4.47, *a*). Zona de contact este cu atât mai mică cu cât corpurile sunt în realitate mai rigide.

Se poate considera că suprafața de contact (*S*) este plană și că aparține planul tangent comun în punctul teoretic de contact *I*. Această modelare nu duce la erori mari.

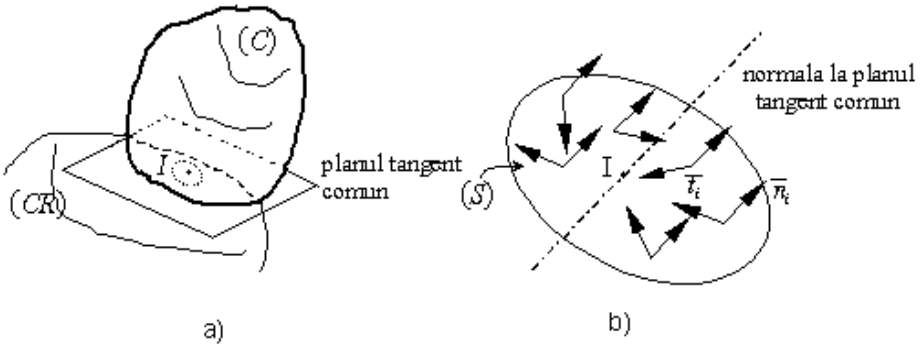


Fig. 4.47.

Între corpul (*C*) și corpul de referință, în zona de contact există o infinitate de puncte comune, puncte de contact. Considerând fiecare punct ca fiind supus unei legături pe suprafața (*S*), în urma ruperii acesteia se introduc cele două forțe de legătură $\bar{n}_i$ și $\bar{t}_i$. Forțele normale $\bar{n}_i$ au cunoscută direcția (paralelă cu normala la (*S*) în *I* (fig. 4.47, *b*), deci normală pe planul tangent comun) și sensul.

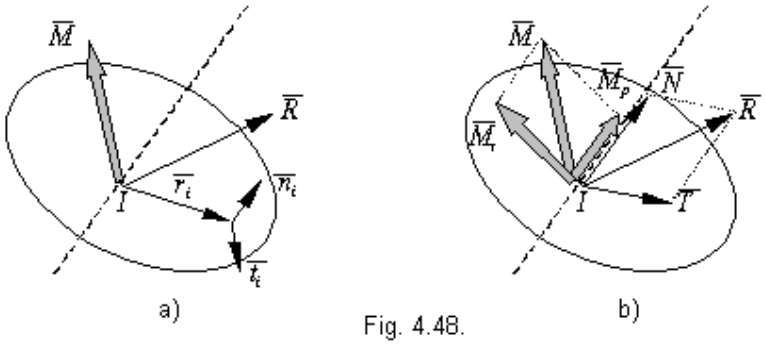


Fig. 4.48.

Forțele $\bar{t}_i$ au suporturile în planul tangent comun la cele două corpuri în *I* (fig. 4.47, *b*). În felul acesta au luat naștere două sisteme de forțe: sistemul de forțe paralele $\bar{n}_i$ și sistemul de forțe coplanare $\bar{t}_i$.

Reducând cele două sisteme de forțe în punctul teoretic de contact I se obține o forță rezultantă $\overline{R}$ și un cuplu de moment $\overline{M}$ care se determină cu relațiile (vezi fig. 4.48, *a*):

$$\mathrm{T}_I \begin{cases} \overline{R} = \sum \overline{n}_i + \sum \overline{t}_i \\ \overline{M} = \sum \mathrm{M}_I \overline{n}_i + \sum \mathrm{M}_I \overline{t}_i \end{cases} \quad (4.74)$$

Dacă se descompune forța $\overline{R}$ după normala la planul tangent comun și după o direcție cuprinsă în planul tangent comun se obțin două componente (fig. 4.48, *b*):

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{T}\,;\ \overline{N} = \sum \overline{n}_i\,;\ \overline{T} = \sum \overline{t}_i\,, \quad (4.75)$$

unde $\overline{N}$ poartă denumirea de *reacțiune normală* și $\overline{T}$ – *reacțiune tangențială* sau *forță de frecare de alunecare*.

Reacțiunea normală $\overline{N}$ se opune deplasării corpului pe direcția normală la planul tangent comun și:

– se aplică în punctul teoretic de contact;

– are direcția normală pe planul tangent comun;

– sensul este în funcție de legăturile diferitelor puncte din zona de contact - unilaterale sau bilaterale;

– mărimea poate fi oricât de mare.

Dacă legătura este unilaterală atunci $0 \le N \le +\infty$, iar dacă legătura este bilaterală atunci $-\infty \le N \le +\infty$. În cazul legăturii unilaterale dacă marimea scalară a lui N rezultă negativă înseamnă că legătura nu există (nu funcționează).

Reacțiunea tangențială $\overline{T}$ este generată de frecare și deci:

– se aplică în punctul teoretic de contact;

– are suportul cuprins în planul tagent comun;

– are sensul opus mișcării (sau tendinței de mișcare) de lunecare pe planul tangent comun;

– mărimea sa nu poate depăși o valoare limită

$$T \le T^l. \quad (4.76)$$

În cazul "frecării uscate" experimental s-a constatat:

$$T^l = \mu N\,, \quad (4.77)$$

în care μ este un coeficient adimensional, denumit *coeficient de frecare de alunecare* și verifică în general legile lui Coulomb.

În cazul "frecării umede", când se produce mișcarea de alunecare, s-a constatat experimental că:

$$T^{l} = k\,v \tag{4.78}$$

unde k este un coeficient dimensional, iar v – mărimea vitezei cu care punctul de contact se deplasează, prin alunecare, pe suprafața de rezemare.

Cuplul de moment $\overline{M}$ se descompune după aceleași direcții ca reacțiunea $\overline{R}$ și se obține (fig. 4.48, *b*):

$$\overline{M} = \overline{M}_r + \overline{M}_p\,; \quad \overline{M}_r = \sum \mathsf{M}_I \overline{n}_i\,; \quad \overline{M}_p = \sum \mathsf{M}_I \overline{t}_i\,. \tag{.4.79}$$

C*uplu de frecare de rostogolire* $\overline{M}_r$ depinde de mărimea zonei de contact și deci intensitatea lui are o mărime limită. El are următoarele caracteristici:

– punctul de aplicație în punctul teoretic de contact;

– direcția lui este cuprinsă în planul tangent comun;

– sensul lui este opus mișcării de rostogolire (respectiv tendinței de rostogolire) a corpului (*C*) pe planul tangent comun;

– mărimea lui scalară nu poate depăși o valoare limită:

$$M_r \le M_r^{l} \tag{4.80}$$

Experimental s-a constatat că:

$$M_r^{l} = sN \tag{4.81}$$

unde s este un coeficient cu dimensiuni de lungime, denumit *coeficient de frecare la rostogolire*; mărimea acestuia depinde de rigiditatea corpurilor în contact și de forma acestora în punctul de contact.

C*uplu de frecare de pivotare* $\overline{M}_p$ depinde de mărimea și forma zonei de contact și se opune mișcării de pivotare a corpului în jurul unei axe normale pe planul tangent comun. El este caracterizat astfel:

– punctul de aplicație este în punctul teoretic de contact;

– direcția lui este normală la planul tangent comun;

– sensul lui este opus mișcării de pivotare (respectiv tendinței de pivotare) a corpului;

– mărimea lui scalară nu poate depăși o valoare limită:

$$M_p \le M_p^{l} \tag{4.82}$$

Experimental s-a constatat că:

$$M_p^l = s'N \tag{4.83}$$

unde s' este un coeficient cu dimensiuni de lungime denumit *coeficient de frecare de pivotare*; se determină experimental pentru fiecare caz în parte și mărimea lui depinde de forma și dimensiunile zonei de contact.

Trebuie făcută observația că atunci când corpul (C) se află în repaus, trebuie examinat prin ce mișcare (sau combinații de mișcări) este posibilă stricarea echilibrului; în concluzie, se vor introduce numai acele cupluri care apar drept consecință a tendinței de mișcare.

4.10.2. Articulaţia

Legătura unui solid rigid de tipul articulației poate fi de două feluri: *articulație spațială* (sau *sferică*) și *articulație plană* (sau *cilindrică*).

a) **Articulația spațială** sau **sferică**. Se spune că un solid rigid este articulat de alt corp atunci când au un punct comun (fig. 4.49), denumit în mod curent articulație, în jurul căruia se pot roti oricum, unul în raport cu celălalt.

Corpul ce prezintă o articulație sferică rămâne numai cu trei grade de libertate în raport cu sistemul de referință (CR). Aceste trei grade de liberate sunt materializate în trei rotiri în jurul a trei axe trirectangulare.

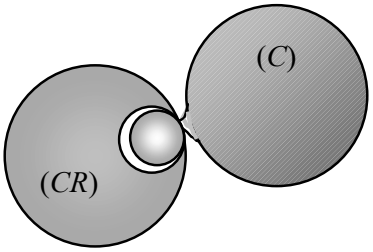


Fig.4.49.

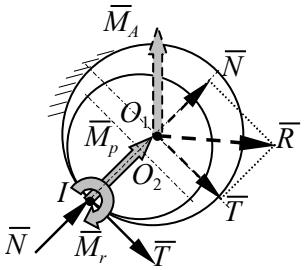


Fig. 4.50.

Realizarea practică a acestui tip de legătură se face prin intermediul a două sfere. O sferă ce aparține corpului (C) și care este cuprinsă de a doua sferă ce aparține corpului de referință (CR). De menționat este faptul că legătura se poate realiza și invers, sfera cuprinsă să fie a corpului de referință.

Din realizarea practică a articulației sferice se poate constata că de fapt acest tip de legătură este în realitate tot un reazem simplu, dar de o formă specială (fig. 4.50). Datorită formei sferice a legăturii, punctul teoretic de contact I poate să fie oriunde pe suprafața sferei fixe (cea care aparține (CR) și care are centrul în punctul O_1 (fig. 4.50)) .

Introducând forțele și cuplele de momente ce apar într-un reazem simplu, și reducându-le apoi în centrul sferei fixe se obține:

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{T} \tag{4.84}$$

$$\overline{M}_A = \overline{M}_p + \overline{M}_r + \overline{O_1 I} \times \overline{T} \tag{4.85}$$

Centrul sferei fixe O_1 se numește punctul teoretic de articulație, iar raza sferei fixe r_1, raza articulației. Din relația (4.85) se constată că momentul $\overline{M}_A$ este creat de frecările de alunecare, de rostogolire și de pivotare ce apar între sfera fixă și cea mobilă.

Reacțiunea din articulație $\overline{R}$ este definită astfel:

– punctul de aplicație este în centrul sferei fixe, O_1;

– direcția și sensul sunt oarecare deoarece punctul I poate fi oriunde pe sfera fixă;

– mărimea ei scalară poate fi oricât de mare datorită principiului rigidității;

Cuplul de frecare din articulație $\overline{M}_A$ este definit astfel:

– punctul de aplicație este în centrul sferei fixe, O_1;

– direcția și sensul sunt oarecare;

– mărimea lui scalară nu poate depăși o valoare limită și anume:

$$M_A \leq M_A^l \tag{4.86}$$

unde valoarea limită poate fi luată sub forma:

$$M_A^l = \lambda R \tag{4.87}$$

în care λ este coeficientul de frecare din articulație, cu dimensiunea unei lungimi; de la caz la caz, λ se determină experimental.

b) **Articulația cilindrică sau plană**. În cazul acestui tip de legătură, cele două sfere sunt înlocuite de doi cilindri, fapt ce face ca forțele de legătură $\overline{N}$ și $\overline{T}$ să fie situate într-un plan perpendicular pe axele celor doi cilindri (fig. 4.51) și cuplul de frecare de pivotare $\overline{M}_p$ să nu existe. Sensul lui $\overline{T}$ este legat de

sensul cuplului de frecare de rostogolire $\overline{M}_r$, din punctul I (de fapt, rostogolirea se produce în jurul generatoarei comune ce trece prin I).

În consecință, deoarece $\overline{T}$ și $\overline{M}_r$ ating concomitent valorile lor limită, rezultă:

$$M_A^l = M_r^l + rT^l = sN + \mu rN = (s + \mu r)\,N\,;$$

$$M_A^l = \lambda R = \lambda\sqrt{N^2 + (T^l)^2} = N\lambda\sqrt{1+\mu^2}$$

unde r este raza cilindrului fix.

În final se obține:

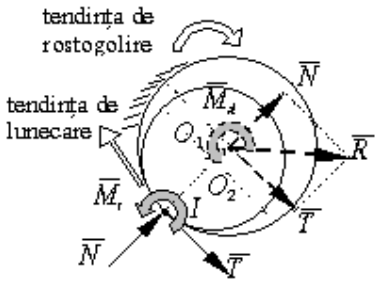


Fig. 4.51.

$$\lambda = \frac{s + \mu r}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (4.88)$$

Prin natura suprafețelor în contact din articulație (de obicei ele sunt prelucrate fin) se poate neglija μ^2 în raport cu 1 și deci :

$$\lambda = s + \mu r \qquad (4.89)$$

De asemenea, cilindrii ce alcătuiesc articulația sunt rigizi și au razele mici, apropiate ca valoare. Din această cauză s se poate neglija în raport cu μr și se poate lua:

$$\lambda = \mu r \qquad (4.90)$$

Sunt însă cazuri când frecarea de orice natură se poate neglija. În această situație singura forță de legătură ce apare este $R(=N)$ ce are necunoscute mărimea și sensul.

Deci, în cazul articulației cilindrice rezultanta forțelor de legătură se află în planul forțelor efectiv aplicate, iar cuplul de frecare are direcția perpendiculară pe acest plan, opunându-se mișcării posibile.

4.10.3. Încastrarea

Se spune că un corp este încastrat în alt corp atunci când ele sunt perfect înțepenite unul în altul.

În această situație corpul (C) nu mai are nici-un grad de libertate față de corpul de referință (CR) (fig. 4.52, a).

Se constată că o parte dintre punctele corpului (C), situate pe suprafața de contact, sunt obligate să rămâna fixe pe suprafața similară a corpului de referință.

Eliberând punctele respective se introduc forțele de legătură $\bar{f}_i$, oricum dispuse și oricât de mari (fig. 4.52, *b*).

Reducând acest sistem de forțe într-un punct I oarecare, denumit punct teoretic de încastrare, rezultă o forță $\overline{R}$ și un cuplu de moment $\overline{M}_I$.

Forța $\overline{R}$, numită *reacțiunea din încastrare,* este definită astfel:

– punctul de aplicație este în punctul teoretic de încastrare;

– direcția și sensul sunt oarecare;

– intensitatea este oricât de mare.

Cuplul de moment $\overline{M}_I$, cuplul de moment din încastrare, are următoarele caracteristici:

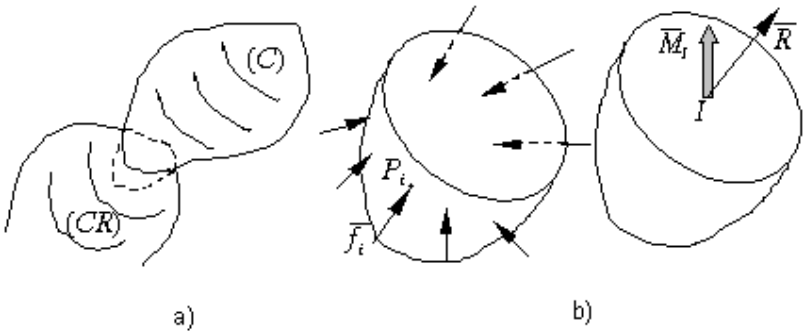


Fig. 4.52.

– punctul de aplicație este în punctul teoretic de încastrare;

– direcția și sensul sunt oarecare;

– intensitatea este oricât de mare.

Dacă forțele efectiv aplicate ce acționează corpul (C) sunt coplanare, atunci încastrarea este o *încastrare plană*, la care forța $\overline{R}$ are direcția cuprinsă în planul forțelor, iar cuplul de moment $\overline{M}_I$ are direcția perpendiculară pe planul forțelor.

4.10.4. Reprezentarea grafică a diferitelor tipuri de legături

Tipurile particulare de legături pe care un solid rigid le poate avea cu sistemul de referință și care au fost prezentate anterior sunt schematizate atât în mecanica teoretică cât și în mecanica aplicată astfel:

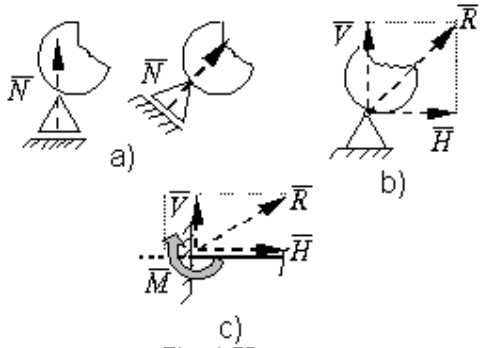


Fig. 4.53.

a) reazemul simplu punctiform la care s-au neglijat toate frecările, ca în figura 4.53, *a*; forța de legătură *N* are totdeauna direcția perpendiculară pe cele două linii paralele;

b) articulația plană la care, de asemenea s-au neglijat frecările, ca în figura 4.53, *b*; cele două forțe de legătură introduse *V* și *H* pot fi introduse oricum dar cu condiția de a avea întotdeauna suporturile perpendiculare între ele;

c) încastrarea plană ca în figura 4.53, *c*; și aici trebuie ca forțele de legătură *V* și *H* să aibă suporturile perpendiculare între ele.

Aplicații.

A.4.6. O bară *AB* de lungime 2*l* și greutate *P* este lăsată să lunece pe suprafața interioară a unui semicilindru neted de rază *R*. Se cere să se determine poziția de echilibru prin intermediul unghiului θ (fig. 4.54).

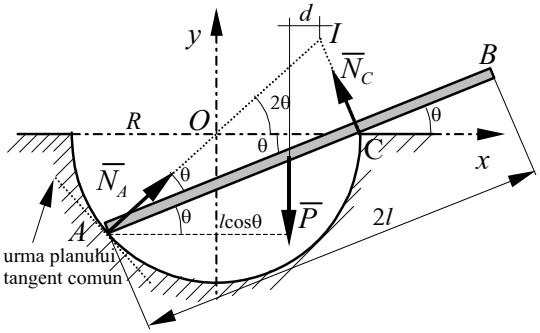


Fig. 4.54.

Datorită faptului că nu există frecare, bara *AB* alunecă pe suprafața interioară a semicili-ndrului până în poziția de echilibru.

Fie θ unghiul corespunzător poziției de echilibru (fig. 4.54).

Corpul *AB* fiind supus la legături în *A* și *C*, pentru a putea pune condiția de torsor nul (vezi relația (4.73)) va trebui să rupem legăturile și să introducem forțele de legătură.

În punctul *A* bara prezintă o legătură de tipul reazemului simplu punctiform fără frecare. Deci singura forță ce apare este $\overline{N}_A$ perpendiculară pe planul tangent comun (la bară și cilindru) în *A*.

În punctul *C* legătura barei este tot un reazem simplu punctiform fără frecare, de data aceasta planul tangent comun fiind chiar planul barei și deci $\overline{N}_C \perp \overline{AB}$.

Forța efectiv aplicată $\overline{P}$ și forțele de legătură $\overline{N}_A$ și $\overline{N}_C$, fiind cuprinse în același plan, condiția (4.73) se transpune în trei ecuații scalare: două de proiecție și una de moment.

$$\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{OX} = 0\right): \quad N_A\cos 2\theta - N_C\sin\theta = 0, \tag{a}$$

$$\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{OX} = 0\right): \quad N_A\sin 2\theta + N_C\cos\theta - P = 0, \tag{b}$$

$$\left(\sum \mathsf{M}_A(\overline{F}_i) = 0\right): \quad -Pl\cos\theta + N_C\cdot 2R\cos\theta = 0. \tag{c}$$

Din ecuația (c) rezultă $N_C = \dfrac{Pl}{2R}$ deoarece $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$, soluție neacceptabilă deoarece în acest caz bara *AB* ar avea poziție verticală. Deci $\cos\theta \neq 0$.

Din ecuația (a) rezultă:

$$N_A = N_C\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta} = \frac{Pl}{2R}\,\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}.$$

Înlocuind N_A și N_C în (b), prin prelucrare, se obține:

$$2\cos^2\theta - \frac{l}{2R}\cos\theta - 1 = 0. \tag{d}$$

Soluțiile ecuației (d) sunt:

$$\cos\theta = \frac{l}{8R} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 8}$$

dintre care $\cos\theta = \dfrac{l}{8R} + \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{l^2}{4R^2} + 8}$ permite determinarea unghiului θ pentru poziția de echilibru:

$$\theta = \arccos\left(\frac{l}{8R} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{l^2}{4R^2} + 8}\right). \tag{e}$$

Problema propusă nu poate avea soluție pentru orice valori ale lui R și l deoarece $\cos\theta \le 1$. Din această cauză:

$$\frac{l}{8R}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{l^2}{4R^2}+8} \le 1.$$

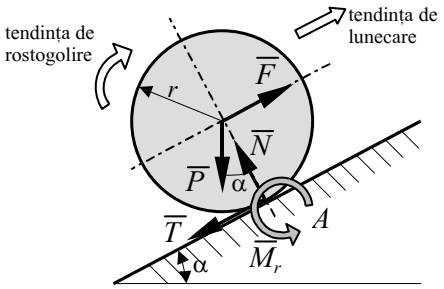


Fig. 4.55.

Rezultă $l \le 2R$, ce are ca semnificație fizică faptul că centrul de greutate al barei (punctul de aplicație al forței $\overline{P}$) este situat în stânga punctului C.

Pentru ca bara AB să rămână în echilibru, este sufucient ca cele trei forțe coplanare $\overline{N}_A$, $\overline{N}_C$ și $\overline{P}$ să aibă suporturile concurente într-un punct, de exemplu în I. De fapt, bara AB va luneca pe suprafața interioară a semicilindrului până când punctul I se va afla pe suportul forței $\overline{P}$. În această situație $d = 0$ și $\mathcal{M}_I(\overline{F}_i) = 0$, (deoarece $\mathcal{M}_I(\overline{N}_A) = 0$ și $\mathcal{M}_I(\overline{N}_C) = 0$). Rezultă:

$$P[2R\cos 2\theta - l\cos\theta] = 0,$$

sau

$$\cos 2\theta - \frac{l}{2R}\cos\theta = 0,$$

ce conduce la aceeași ecuație (d) cu soluția (e).

A.4.7. Un cilindru de rază r și greutate P este menținut în echilibru pe un plan înclinat cu ungiul de cea mai mare pantă α de o forță F aplicată în centrul de greutate și paralelă cu linia de cea mai mare pantă (fig. 4.47). Cât de mare trebuie să fie intensitatea forței F pentru ca cilindrul să rămână în echilibru dacă este considerată atât frecarea de lunecare prin coeficientul de frecare de lunecare μ, cât și frecarea de rostogolire prin coeficientul de frecare de rostogolire s?

Se poate constata că cilindrul de rază r se sprijină cu frecare pe planul înclinat. Din această cauză pe lângă forța de legătură normală $\overline{N}$ apare și forța de frecare de alunecare $\overline{T}$, al cărei sens a fost adoptat în ipoteza că tendința de lunecare a cilindrului este în susul planului înclinat (fig. 4.47).

Considerând că mișcarea de pivotare nu se produce, singurul cuplul de frecare ce apare este cuplu de frecare de rostogolire $\overline{M}_r$ al cărui sens a fost, de asemenea, adoptat arbitrar considerând că tendința de rostogolire a cilindrului este în susul planului înclinat (fig. 4.47).

Sistemul de forțe efectiv aplicate ($\overline{P}$ și $\overline{F}$) și de legătură ($\overline{N}, \overline{T}$), formează un sistem de forțe coplanare, iar cuplul $\overline{M}_r$ fiind perpendicular pe planul forțelor, ecuațiile de echilibru sunt în număr de trei. Ele vor fi scrise astfel: o ecuație de proiecție pe direcția planului înclinat, o ecuație de proiecție pe o direcție normală la planul înclinat și o ecuație de moment în raport cu punctul A:

$$F - P\sin\alpha - T = 0\ ; \tag{f}$$

$$N - P\cos\alpha = 0\ ; \tag{g}$$

$$M_r - Fr + Pr\sin\alpha = 0. \tag{h}$$

Se poate constat că sunt patru necunoscute (mărimile forțelor F, N, T și marimea cuplului M_r) și doar trei ecuații. Din această cauză lângă condițiile de echilibru de natură statică trebuie precizate și condițiile de natură fizică (condițiile de natură geometrică fiind implicite):

$$T \leq \mu N \tag{i}$$

$$M_r \leq sN. \tag{j}$$

Echilibrul se poate strica fie prin alunecare, fie prin rostogolire, fie prin alunecare și rostogolire. Mai întâi se va studia pierderea echilibrului prin alunecare, apoi prin rostogolire, urmând ca în final să se facă o analiză a diferitelor cazuri.

Condiția de nealunecare. Din ecuația (f) rezultă:

$$T = F - P\sin\alpha,$$

iar din (g)

$$N = P\cos\alpha.$$

Înlocuind aceste valori în inegalitatea (i) rezultă:

$$F \leq P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Pentru a determina valoarea forței F la care cilindrul nu va aluneca în josul planului, în ultima relație se schimbă sensul inegalității și semnul coeficientului de frecare de lunecare. Rezultă:

$$F \geq P(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha).$$

Codiția generală de nealunecare a cilindrului pe planul înclinat va fi :

$$P(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le F \le P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \qquad \text{(k)}$$

Condiția de nerostogolire. Din ecuația (h) se determină:

$M_r = Fr - Pr\sin\alpha$.

Înlocuit în (j) el ne duce la valoarea forței F pentru care cilindrul nu se rostogolește în susul planului înclinat:

$$F \le P(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha).$$

Pentru ca echilibrul să nu se strice prin rostogolire în josul planului forța F trebuie să îndeplinească condiția:

$$F \ge P(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha).$$

Codiția generală de nerostogholiore a cilindrului pe planul înclinat va fi deci:

$$P(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha) \le F \le P(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha). \qquad \text{(l)}$$

Din analiza inecuațiilor (k) și (l) se evidențiază următoarele modalități de pierdere a echilibrului roții:

– dacă $\mu < s/r$ atunci echilibru se pierde prin alunecare;

– dacă $\mu > s/r$ atunci echilibrul se pierde prin rostogolire;

– dacă $\mu = s/r$ atunci echilibrul se pierde atât prin alunecare cât și prin rostogolire.

De obicei la roțile de vehicole $\mu > s/r$ din care cauză la urcare roata începe mai întâi să se rostogolească.

Teste

T.4.16. O articulație sferică răpește unui solid rigid:

a) două grade de libertate;

b) trei grade de libertate;

c) patru grade de libertate;

d) cinci grade de libertate.

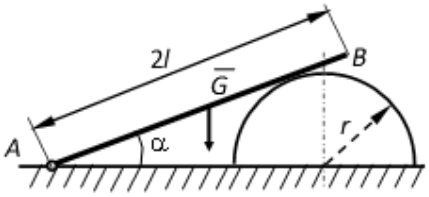


Fig. 4.56.

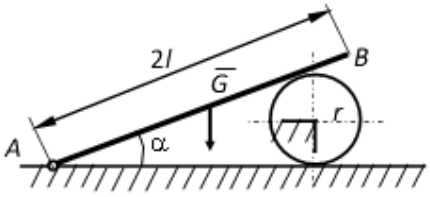


Fig. 4.57.

T.4.17. O articulație cilindrică răpește unui solid rigid:

a) două grade de libertate;

b) trei grade de libertate;

c) patru grade de libertate;

d) cinci grade de libertate.

T.4.18. Bara *AB* de lungime 2*l* și greutate *G* este articulată în *A* și se sprijină pe un semicilindru neted de rază *r* (fig. 4.56). Forța de legătură dintre bară și semicilindru are valoarea:

a) Gl/r; *b*) $Gl/r\sin\alpha$; c) $Gl\sin\alpha/r$ *c*) $-Gr/l$.

T.4.19. Bara *AB* de lungime 2*l* și greutate *G* este articulată în *A* și se sprijină pe un cilindru neted de rază *r* (fig. 4.57). Forța de legătură dintre bară și cilindru are valoarea:

a) $G\frac{l}{r}\cos\alpha\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$;

b) $G\frac{l}{r}\sin\alpha\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$;

c) $G\frac{l}{r}\sin\alpha\cdot tg\frac{\alpha}{2}$;

d) $G\frac{l}{r}\cos\alpha\cdot tg\frac{\alpha}{2}$.

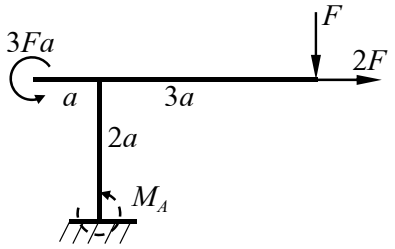


Fig. 4.58.

T.4.20. Pentru cadrul din figura 4.58. valoarea momentului din încastrarea *A* este:

a) 3*Fa*; *b*) 4*Fa*;

c) 5*Fa*; *c*) 6*Fa*.

5. STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

5.1. DEFINIŢIE, LEGĀTURI, FORŢE EFECTIV APLICATE, FORŢE DE LEGĀTURĀ

Un sistem de corpuri constă dintr-un grup de corpuri, legate între ele prin legături de tipul celor examinate în capitolul 4.10: reazeme simple, articulații sau încastrări.

Un corp ce aparține sistemului poate avea legături exterioare cu unul sau mai multe corpuri de referință, în unul sau mai multe puncte ale lui. De asemenea, el poate avea legături interioare cu unul sau mai multe corpuri din sistem, în unul sau mai multe puncte ale lui (fig. 5.1).

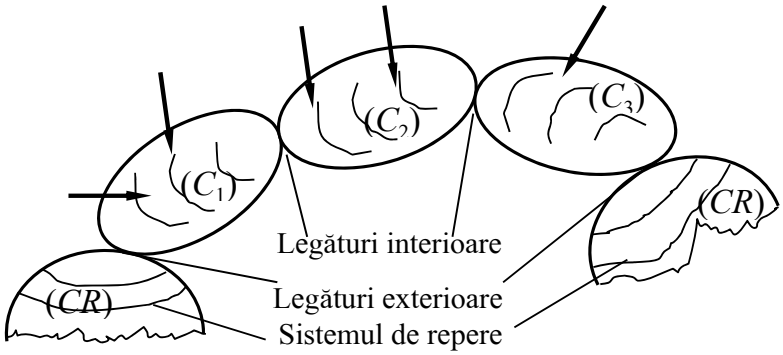


Fig. 5.1.

Ca urmare forțele de legătură ce apar în cadrul unui sistem de corpuri pot fi:

– *forțe de legătură exterioare* – cele care se manifestă între corpurile ce alcătuiesc sistemul și corpurile de referință;

– *forțe de legătură interioare* – cele care se manifestă între corpurile ce alcătuiesc sistemul.

Referitor la forțele care apar în cazul sistemelor de corpuri – forțe efectiv aplicate și forțe de legătură – trebuie precizat că operațiile elementare de echivalență nu se pot aplica decât asupra forțelor ce acționează asupra fiecărui corp în parte.

Iar în ceea ce privește forțele de legătură interioare, acestea sunt egale două câte două și direct opuse, conform principiului egalității acțiunilor reciproce.

5.2. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE CORPURI ACŢIONATE DE FORŢE

Pentru ca un sistem de corpuri acționat de forțe să fie în echilibru este necesar ca fiecare dintre corpurile ce-l alcătuiesc să se afle în echilibru față de un reper ales. În acest fel, fiecare corp este în echilibru și față de celelalte corpuri din sistem. Rezultă de aici necesitatea izolării fiecărui corp în parte (fig. 5.2).

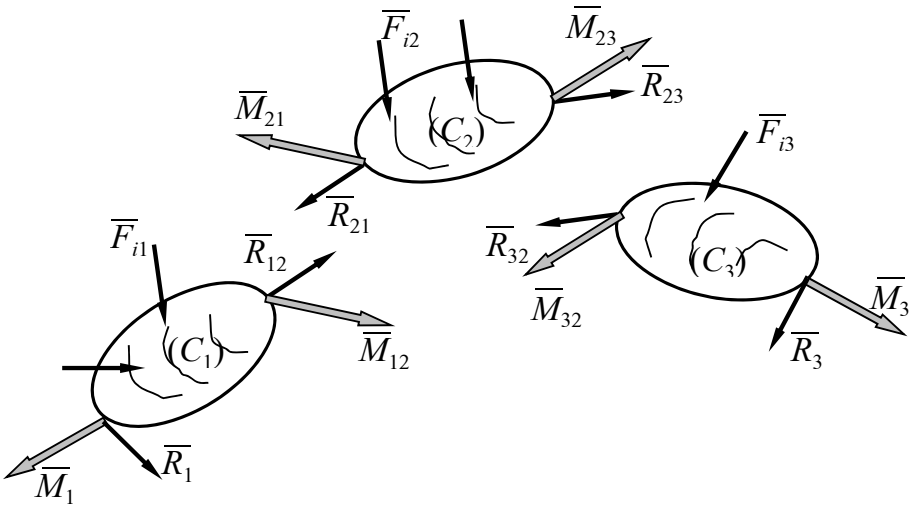


Fig. 5.2.

Acest lucru se realizează prin ruperea tuturor legăturilor, atât cele exterioare cât și cele interioare și înlocuirea lor cu forțe corespunzătoare fiecărui tip de legătură în parte, în baza pricipiului forțelor de legătură. Trebuie avut în vedere că în cazul forțelor de legătură interioare acestea trebuiesc introduse pe corpurile pe care apar, ca perechi de forțe egale și direct opuse:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{ij} &= -\overline{R}_{ji}; \\ \overline{M}_{ij} &= -\overline{M}_{ji}; \end{aligned} \tag{5.1}$$

indicii *ij* arată că sistemul de forțe de legătură interioară este format din forțe care sunt aplicate corpului (C_i) și care reprezintă acțiunea mecanică a corpului (C_j), asupra corpului (C_i).

În urma izolării corpurilor, fiecare corp din sistem, acționat atât de forțele efectiv aplicate, cât și cele de legătură, devine liber și, deci, i se pot pune condițiile de echilibru sub forma (4.73). Relațiile statice obținute din condițiile (4.73) se completează, pentru fiecare corp în parte, cu relațiile de natură geometrică, unde este cazul, și cu relațiile de natură fizică.

În felul acesta din condițiile de natură statică, pentru fiecare corp în parte, se obține un sistem de 6 ecuații (sau 3 ecuații în cazul în care sistemul de forțe efectiv aplicate și de legătură ce acționează asupra corpului formează un sistem coplanar de forțe). Acest sistem se completează cu ecuațiile de natură geometrică și fizică – acolo unde este cazul.

Reunind ecuațiile scrise pentru toate corpurile, se obține sistemul global de ecuații care exprimă condițiile de echilibru pentru sistemul de corpuri studiat. În cadrul acestui sistem necunoscutele ce pot apare pot reprezenta, pe de o parte, parametrii prin intermediul cărora sistemul de corpuri se află în echilibru, iar pe de altă parte, forțele din cadrul sistemului, în general mărimi scalare ale forțelor de legătură.

Pentru ca sistemul să aibă soluție trebuie ca numărul total al ecuațiilor să fie egal cu numărul general al necunoscutelor.

5.2.1. Teorema echilibrului părţilor

Deoarece, în cadrul unui sistem de corpuri aflat în echilibru față de un reper ales, fiecare corp în parte se află în echilibru față de reperul considerat și față de celelalte corpuri, rezultă că două sau mai multe corpuri, ce formează un subsistem, se află în echilibru față de celelalte corpuri ce alcătuiesc sistemul. De aici, posibilitatea ca un sistem de corpuri să fie împărțit în două sau mai multe subsisteme pentru care echilibrul se exprimă ca și când ar forma fiecare un sistem rigid. Bineînțeles că, în această situație toate forțele interioare dintre corpurile ce alcătuiesc subsistemul nu vor apare, fiind specificate numai forțele efectiv aplicate asupra subsistemului și forțele de legătură dintre corpurile subsistemului și corpurile de referință, pe de o parte, și celelalte corpuri ale sistemului, pe de altă parte.

Avantajul metodei bazată pe teorema echilibrului părților constă în aceea că se pot determina anumiți parametri sau forțe de legătură prin scrierea unui număr mult mai mic de ecuații decât în cazul metodei izolării corpurilor.

Se face precizarea că ecuațiile de echilibru dobândite prin metoda echilibrului părților nu constitue ecuații suplimentare la sistemul general de ecuații, obținut atunci când echilibrul sistemului de corpuri se studiază izolând fiecare corp în parte.

5.2.2. Teorema solidificării

Teorema solidificării demonstrează că dacă un sistem de corpuri rigide supuse la legături exterioare se află în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe efectiv aplicate, el rămâne în echilibru sub acțiunea acestor forțe și în cazul în care ar deveni un rigid cu legăturile exterioare inițiale. Pe baza acestei teoreme se poate considera sistemul de corpuri ca un singur solid rigid care trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a forțelor de legătură exterioare. În felul acesta ecuațiile de echilibru ce pot fi scrise vor conține numai forțele efectiv aplicate și forțele de legătură exterioare. Prin rezolvarea acestor ecuații se pot determina anumiți parametri de echilibru și/sau anumite forțe de legătură exterioare și se pot verifica calculele efectuate prin celelalte metode.

Se precizează și în acest caz, că ecuațiile de echilibru dobândite prin metoda solidificării nu constitue ecuații suplimentare la sistemul general de ecuații obținut prin metoda izolării corpurilor.

5.3. GRINZI CU ZĀBRELE

Grinzile cu zăbrele constituie sisteme de bare, indeformabile din punct de vedere geometric, numite *zăbrele*.

Zăbrelele sunt legate atât între ele cât și de corpurile de referință prin articulații situate la capetele lor.

Locul unde se leagă două sau mai multe bare se numește *nod*.

Forțele efectiv aplicate ce acționează asupra zăbrelelor sunt aplicate numai la nodurile acestora.

Legăturile exterioare ale unei grinzi cu zăbrele sunt complete, în sensul că acestea nu permit grinzii nici o mișcare provocată de forțele efectiv aplicate, față de un reper dat.

În cazul în care toate zăbrelele ce alcătuiesc grinda și forțele ce le acționează sunt conținute într-un plan, grinda cu zăbrele este numită *gindă plană* (fig. 5.3), în caz contrar este *grindă spațială*.

În funcție de poziția pe care o ocupă, barele unei grinzi cu zăbrele poartă diverse denumiri (fig. 5.3): *tălpi* (barele care formează conturul grinzii cu zăbrele); *diagonale* și *montanți* (barele care au axele perpendiculare pe tălpi la grinzi cu tălpile paralele).

Pentru ca o grindă cu zăbrele să constitue un sistem indeformabil din punct de vedere geometric, între numărul barelor b și numărul nodurilor n, trebuie să existe relația:

$$b \geq 2n - 3, \qquad (5.2)$$

pentru grinzi cu zăbrele plane;

$$b \geq 3n - 6, \qquad (5.3)$$

pentru grinzi cu zăbrele plane.

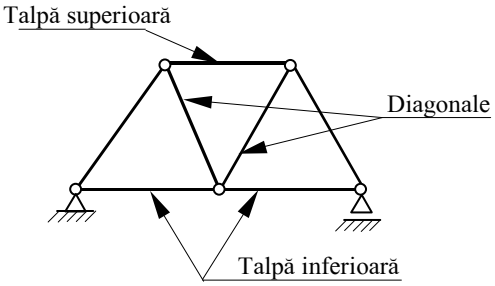


Fig. 5.3.

După cum se va demonstra în continuare aceste condiții însă nu sunt suficiente pentru ca orice grindă cu zăbrele – palană sau spațială - să fie și static determinată.

5.3.1. Calculul grinzilor cu zăbrele

Izolând o bară din cadrul unei grinzi cu zăbrele prin secționarea articulațiilor de la capete, pentru ca ea să rămână în echilibru sub acțiunea forțelor de legătură $\overline{R}_i$ și $\overline{R}_j$ (fig. 5.2, *a*) trebuie ca aceste forțe să aibă direcția axei barei, sensurile contrare și modulele egale (fig. 5.4, *b*).

Rezultă că barele unei grinzi cu zăbrele sunt sau întinse sau comprimate. Așa dar, dacă se secționează o bară și se introduce forța de legătură, care să reprezinte

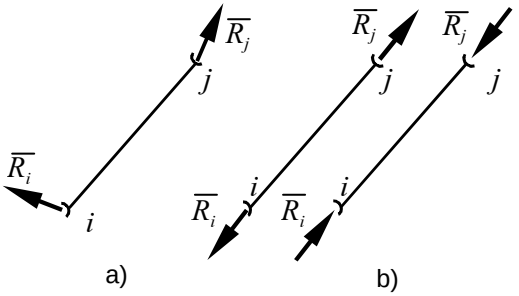


Fig.5.4.

acțiunea părții înlăturate asupra părții rămase, aceasta va avea, de asemenea, direcția axei barei. Acestă forță de legătură poartă numele de efort secțional axial și el poate fi de compresiune sau de întindere.

Problema care se pune este determinarea acestor eforturi secționale. Din acest punct de vedere relațiile (5.2) și (5.3) sunt necesare, dar nu și suficiente pentru a realiza o grindă cu zăbrele static determinată, adică o grindă cu zăbrele la care se pot determina eforturile din bare. Din această cauză pe lângă aceste condiții trebuie pusă și condiția de strictă indeformabilitate, ce va fi prezentată ulterior. Grinzile cu zăbrele ce nu îndeplinesc această condiție sunt denumite *sisteme critice*.

Metodele de determinare a eforturilor secționale în barele unei grinzi cu zăbrele, utilizate în continuare, au la bază teoremele prezentate la echilibrului unui sistem de corpuri acționat de forțe (v. par. 5.2).

Metoda separării nodurilor. Această metodă are la bază metoda separării corpurilor și constă în izolarea fiecărui nod al grinzii cu zăbrele. Izolarea se efectuează prin secționarea tuturor barelor adiacente unui nod și introducerea eforturilor secționale axiale cu sensul lor pozitiv, care, în mod convențional, este cel de întindere (fig. 5.4). Dacă nodul izolat prezintă legături exterioare atunci acestea se înlocuiesc cu forțele de legătură corespunzătoare. De asemenea, dacă în nodul izolat există și forțe efectiv aplicate, ele trebuie luate în considerare.

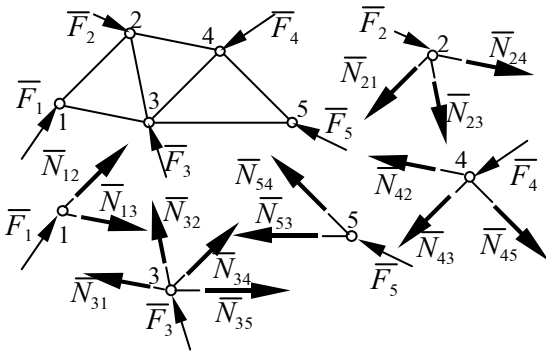


Fig. 5.4.

În felul acesta se izolează fiecare nod și fiecare bară. Așa cum s-a arătat, eforturile din bare sunt axiale deci eforturile aplicate în noduri au direcțiile cunoscute. Pentru determinarea mărimilor acestora rămâne să se exprime numai echilibrul fiecărui nod.

Din cele prezentate rezultă că în fiecare nod izolat va exista un sistem de forțe concurente. Prin exprimarea echilibrului tuturor nodurilor se vor scrie *n* relații de forma:

$$\overline{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{N}_{ij} = 0 \ (i \neq j) \tag{5.4}$$

în care $\overline{F}_i = \overline{F}_i^a + \overline{F}_i^l$ reprezintă suma tuturor forțelor efectiv aplicate și de legătură din nodul i.

Relațiile vectoriale (5.4) duc la scrierea a $2n$ relații scalare în cauzul grinzii cu zăbrele plane și la $3n$ relații în cazul grinzii cu zăbrele spațiale. În ecuațiile astfel obținute apar ca necunoscute eforturile secționale N_{ij} și forțele de legătură exterioare. Cum $N_{ij} = N_{ji}$, numărul eforturilor din bare este egal cu numărul barelor b.

În cazul unei grinzi cu zăbrele plane vor exista $2n$ ecuații cu $b + 3$ necunos-cute, iar în cazul grinzii cu zăbrele spațiale, $3n$ ecuații cu $b + 6$ necunoscute.

Rezultă că eforturile în barele unei grinzi cu zăbrele se pot determina dacă relațiile (5.2) și (5.3) sunt satisfăcute la limită. Aceasta reprezintă *condiția de strictă indeformabilitate*.

Cele $2n$, respectiv $3n$ ecuații se rezolvă ușor apelând la tehnici moderne de calcul. În anumite cazuri însă, sistemul general de ecuații se poate rezolva ușor atunci când, de exemplu, o grindă plană este alcătuită din bare care formează triunghiuri *juxtapuse* în plan. În acest caz exită întotdeauna un nod unde sunt doar două bare în care eforturile sunt necunoscute și care prin scrierea condițiilor de echilibru pot fi determinate. Odată cunoscute aceste eforturi, se poate trece la izolarea unui nod vecin celui studiat în care, de asemenea, să existe numai două bare în care eforturile sunt necunoscute. În felul acesta se pot determina toate eforturile prin scrierea de ecuații simple, în care să apară cel mult două necunoscute.

Acestă metodă comportă cunoașterea forțelor de legătură exterioare, cel puțin în primul nod de la care începe scrierea ecuațiilor.

Dacă nu există nici un nod în care forțele exterioare (efectiv aplicate și de legătură) să fie cunoscute și să existe cel mult două bare concurente (pentru grinda plană), atunci forțele de legătură se vor determina prin teorema solidificării.

Această metodă permite determinarea tuturor eforturilor din bare, însă volumul de lucru este mare, iar corectitudinea rezultatelor poate fi verificată numai după scrierea ultimilor ecuații. Dacă se constată că ecuațiile de verificare nu sunt îndeplinite, nu se cunoaște unde este greșala și calculul

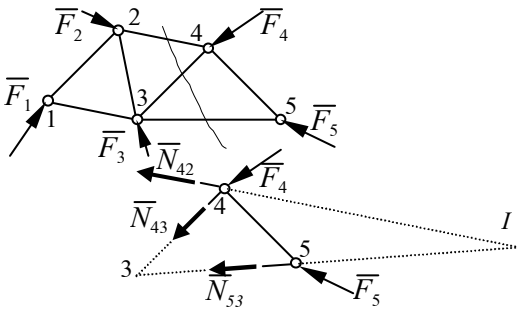


Fig. 5.5.

trebuie reluat de la prima la ultima ecuație.

Existența erorilor de calcul poate fi pusă în evidență prin utilizarea teoremei echilibrului părților sau a solidificării.

Metoda secțiunilor oarecare. Această metodă se bazează pe teorema echilibrului părților și constă în împărțirea grinzii cu zăbrele în două părți distincte printr-o secțiune oarecare. În cazul grinzii cu zăbrele plane, secțiunea trebuie să taie cel mult trei bare neconcurente în care eforturile să fie necunoscute. Pentru barele secționate se introduc eforturile secționale cu sensurile lor pozitive după care se exprimă echilibrul uneia dintre părți. În cazul grinzii cu zăbrele plane vor rezulta trei ecuații de echilibru în care, pentru a obține soluții nu trebuie să apară mai mult de trei necunoscute. Ecuațiile de echilibru se vor alege și se vor scrie în mod convenabil astfel încât în fiecare din ele să apară doar o necunoscută.

Spre exemplu, pentru grinda cu zăbrele din figura 5.5, în urma secționării se alege pentru exprimarea echilibrului partea dreaptă (cea în care sunt nodurile 4 și 5) deoarece este mai simplă și sunt mai puține forțe efectiv aplicate și de legătură.

Pentru scrierea ecuațiilor de echilibru se aleg ecuații de moment. Astfel pentru determinarea efortului $N_{5\text{-}3}$ se va scrie ecuația de moment în nodul 4 deoarece față de acest nod, eforturile $N_{4\text{-}2}$ și $N_{4\text{-}3}$ nu dau moment. Pentru determinarea efortului $N_{4\text{-}2}$ se va scrie o ecuație de moment în raport cu nodul 3, iar pentru determinarea efortului $N_{4\text{-}3}$ se va scrie o ecuație de moment în raport cu punctul I (cu toate că se vor întâmpina dificultăți la exprimarea brațelor forțelor).

Această metodă prezintă avantajul că permite să se determine anumite eforturi secționale repede și exact, fără a scrie un număr mare de ecuații.

La fel ca și în cazul metodei izolării nodurilor, în anumite situații, este necesară cunoașterea prealabilă a forțelor de legătură exterioare (prin aplicarea teoremei solidificării).

În practică, de cele mai multe ori, cele două metode se aplică cuplat într-un mod avantajos.

Aplicații.

A.5.1. Două sfere omogene, identice, de rază r, fiecare având greutatea G, sunt așezate în interiorul unui cilindru drept, de rază R, deschis la ambele capete, și care stă pe o masă orizontală aspră. Să se determine greutatea minimă a cilindrului, necesară pentru ca el să nu se răstoarne, neglijând grosimea pereților lui.

Pentru rezolvarea problemei se aplică metoda izolării corpurilor. Astfel, izolând cilindul, asupra lui acționează, pe lângă forța efectiv aplicată Q, și cele două forțe de legătură interioare N_C și N_D. Forța de legătură exterioară

N pentru situația de echilibru trebuie să aibă punctul de aplicație în interiorul perimetrului de sprijin al cilindrului. Deoarece ne interesează valoarea minimă a greutății Q pentru ca sistemul să rămână în echilibru, vom introduce reacțiunea N în punctul A (se va neglija grosimea peretelui cilindrului), studiind în acest caz echilibrul la limită (fig. 5.7).

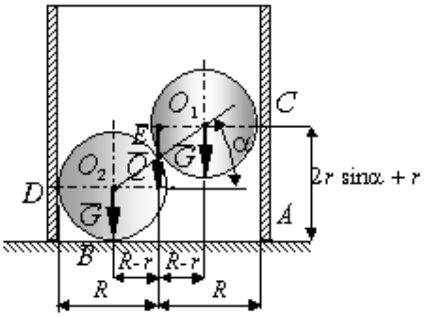


Fig.5.6.

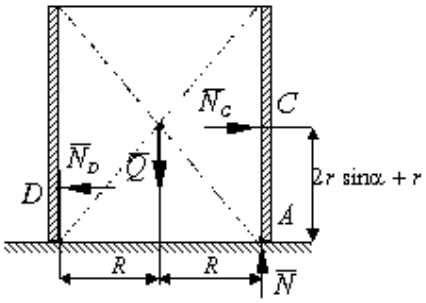


Fig. 5.7.

Ecuațiile de echilibru au forma:

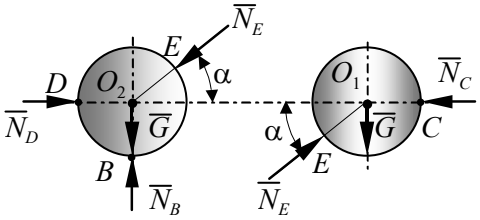
$$N_C - N_D = 0;$$

$$N - Q = 0;$$

$$N_C r\,(2\sin\alpha + 1) - N_D r - QR = 0.$$

În figura 5.8 sunt prezentate cele două sfere cu forțele efectiv aplicate și de legătură ce le acționează.

Se poate constata că sistemele de forțe astfel obținute sunt compuse din forțe concurente și coplanare, deci, condițiile de echilibru se exprimă doar prin două ecuații de proiecție (pe orizontală și verticală). Astfel pentu sfera din figura 5.8, *a* ecuațiile de echilibru au forma:



a) b)

Fig. 5.8.

$$N_D - N_E\cos\alpha = 0;$$

$$N_B - G - N_E\sin\alpha = 0.$$

Pentru sfera din figura 5.8, *b* ecuațiile de echilibru sunt:

$$N_E \cos\alpha - N_C = 0;$$

$$N_E \sin\alpha - G = 0.$$

Prin rezolvarea succesivă a ecuaților prezentate și prin eliminarea forțelor de legătură interioare se obține:

$$N_E = \frac{G}{\sin\alpha}; \qquad N_C = N_D = G\mathrm{ctg}\alpha;$$

$$N_B = 2G; \qquad 2Gr\cos\alpha = QR.$$

Valoarea minimă a greutății Q pentru ca cilindrul să nu se răstoarne este:

$$Q_{min} = 2G\frac{R-r}{R}, \text{ deoarece } \cos\alpha = \frac{R-r}{R} \text{ (vezi fig. 5.6).}$$

A.5.2. Pentru grinda cu zăbrele din figura 5.9 solicitată de forța F aplicată în nodul 3, se cere determinarea eforturile secționale din bare.

Pentru determinarea eforturilor secționale se folosește metoda separării nodurilor. Se poate constata că în cazul grinzii cu zăbrele analizate nu este necesar ca, în prealabil, să se determine forțele de legătură exterioere (V_1, V_4, H_4), deoarece metoda aplicată începe prin separarea nodului 3. În acest nod sunt concurente decât 2 bare, astfel încât, prin scrierea ecuațiilor de echilibru (2 la număr) se pot determina cele două eforturi secționale în funcție de forța efectiv aplicată F. Se trece apoi – în ordine – la nodurile 2,1 și 4 obținându-se următorul sistem de ecuații:

$$N_{3\text{-}4}\sin 30^0 + F = 0; \qquad N_{2\text{-}3} - N_{2\text{-}1}\sin 45^0 = 0;$$

$$N_{1\text{-}4} + N_{1\text{-}2}\cos 45^0 = 0; \qquad N_{3\text{-}2} + N_{3\text{-}4}\cos 30^0 = 0;$$

$$N_{2\text{-}4} + N_{1\text{-}2}\cos 45^0 = 0; \qquad N_{1\text{-}2}\cos 45^0 - V_1 = 0;$$

$$N_{4\text{-}3}\sin 60^0 - N_{4\text{-}1} + H_4 = 0; \qquad N_{4\text{-}3}\cos 60^0 + N_{4\text{-}2} - V_4 = 0.$$

Folosind egalități $N_{2\text{-}3} = N_{3\text{-}2}$; $N_{1\text{-}2} = N_{2\text{-}1}$; $N_{3\text{-}4} = N_{4\text{-}3}$; $N_{4\text{-}1} = N_{1\text{-}4}$ și $N_{4\text{-}2} = N_{2\text{-}4}$ se rezolvă, pe rând, ecuațiile anterioare, obținându-se eforturile din bare, precum și reacțiunile din legături.

Astfel:

$$N_{3\text{-}4} = N_{4\text{-}3} = -2F; \qquad N_{2\text{-}3} = N_{3\text{-}2} = F\sqrt{3}; \qquad N_{1\text{-}2} = N_{2\text{-}1} = F\sqrt{6};$$

$$N_{4\text{-}2} = N_{2\text{-}4} = -F\sqrt{3}; \qquad N_{4\text{-}1} = N_{1\text{-}4} = -F\sqrt{3}; \qquad V_1 = F\sqrt{3};$$

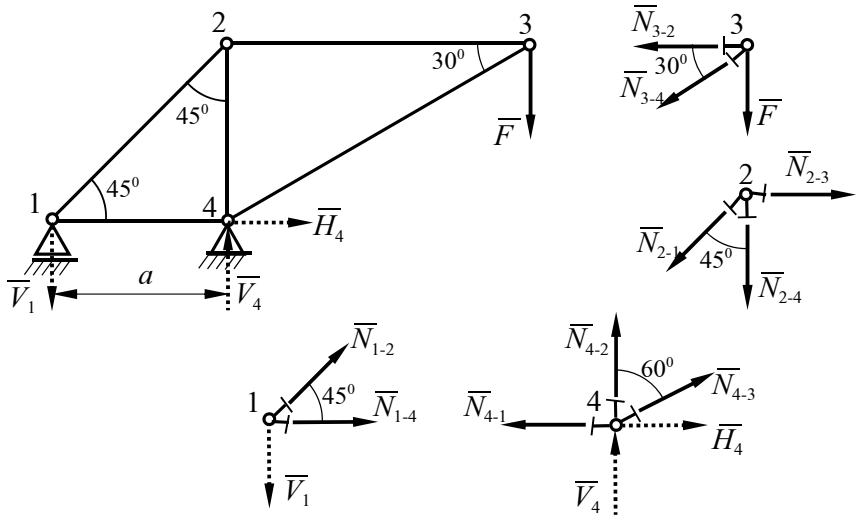


Fig. 5.9.

$H_4 = 0$; $V_4 = F(1+\sqrt{3})$.

Verificarea rezultatelor se poate face folosind teorema solidificării prin scrierea ecuațiilor de proiecție pe orizontală și pe verticală și a ecuației de moment în raport cu nodul 4:

$$H_4 = 0 \; ; \quad F + V_1 - V_4 = 0 \; ; \quad V_1 \cdot a - F \cdot a \cdot \mathrm{ctg}30^0 = 0.$$

A.5.3. Pentru cadrul cu trei articulații din figura 5.10, *a* se cere să se determine forțele de legătură.

Cele două corpuri care alcătuiesc sitemul de cadre sunt legate între ele prin intermediul articulației *B*, iar de corpul de referință prin intermediul articulațiilor *A* și *C*. Toate cele trei articulații sunt articulații plane (cilindrice) în care se neglijează frecările. Din această cauză, în urma ruperii legăturilor, în *A*, *B* și *C* se introduc decât câte două forțe de legătură, care au suporturile perpendiculare.

Forțele H_A, V_A, H_C și V_C sunt forțe de legătură exterioare. Forțele H_B și V_B sunt forțe de legătură interioare, fapt pentru care, pe cele două cadre, aceste forțe s-au introdus de sensuri contrare, mărimile lor fiind egale (fig. 5.10, *a* și *b*).

Sistemele de forțe compuse din forțele efectiv aplicate și de legătură, care acționează asupra celor două cadre, formează sisteme de forțe coplanare. În consecință, pentru fiecare cadru se poat scrie 3 ecuații de

echilibru, în total 6 ecuații. Necunoscutele din aceste ecuații le reprezintă forțele de legătură, în număr de 6. Rezultă că sistemul ecuațiilor de echilibru poate fi rezolvat, el fiind un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute.

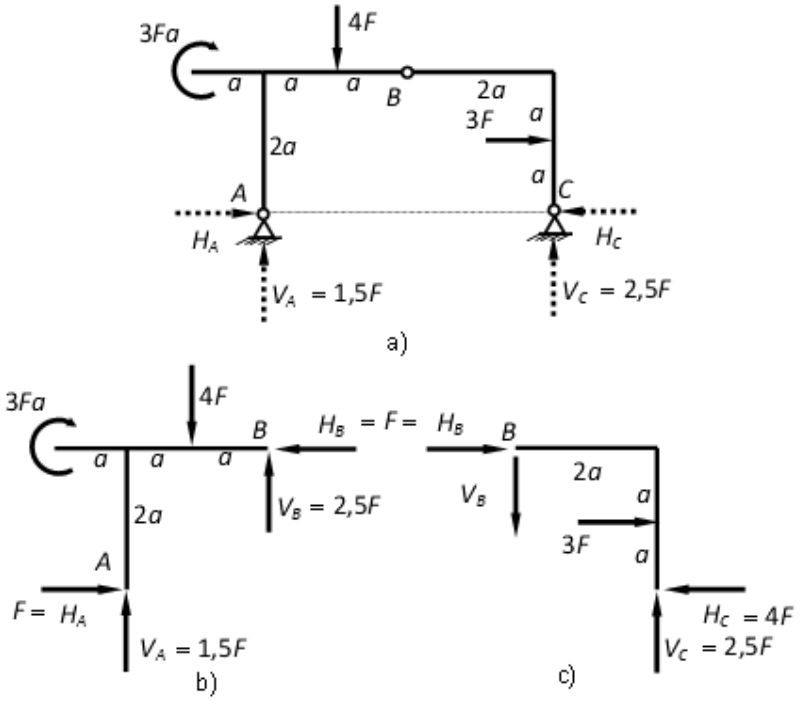


Fig. 5.10.

Rezolvarea acest sistem poate fi ușurată mult dacă se folosește particularitatea sistemului de cadre, care consta în faptul că cele două articulații exterioare se află la același nivel (fig. 5.10, *a*). Prin introducerea forțelor de legătură exterioare așa cum este prezentat în figura 5.10, *a*, se poate aplica metoda solidificării pentru determinarea forțelor V_A și V_C. Acest lucru este posibil scriind ecuații de moment în *A*, respectiv *C*, pe întreg sistemul, ecuații în care vor apare ca necunoscute V_C, respectiv V_A, deoarece forțele H_A și H_C nu dau momente în raport cu cele două articulații exterioare.

$$\left(\sum \mathrm{M}_A(\overline{F}_i) = 0\right): \; 3Fa + 4F{\cdot}a + 3F{\cdot}a - V_C \cdot 4a = 0 \;\Rightarrow V_C = 2{,}5F;$$

$$\left(\sum \mathrm{M}_C(\overline{F}_i) = 0\right): \; 3Fa - 4F{\cdot}3a + 3F{\cdot}a + V_A \cdot 4a = 0 \;\Rightarrow V_A = 1{,}5F.$$

Înainte de a calcula celelalte forțe de legătură se poate verifica corectitudinea calculelor anterioare prin scriere ecuației de proiecție pe verticală:

$$\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{vert} = 0\right) : 1{,}5F - 4\mathrm{F} + 2{,}5F = 0.$$

Pentru determinarea forțelor H_A și H_C se scriu două ecuații de moment în raport cu punctul B, dar pe cele două corpuri separate.

$$\left(\left(\sum \mathsf{M}_B(\overline{F}_i)\right)_{A-B} = 0\right) : \; 3Fa + 1{,}5F{\cdot}2a - 4F{\cdot}a - H_A \cdot 2a = 0 \;\Rightarrow H_A = F;$$

$$\left(\left(\sum \mathsf{M}_B(\overline{F}_i)\right)_{B-C} = 0\right) : \; 3F{\cdot}a + 2{,}5F{\cdot}2a - H_C \cdot 2a = 0 \;\Rightarrow H_C = 4F.$$

Și aceste calcule se pot verifica prin scrierea unei ecuații de proiecție pe orizontală pentru toate forțele de pe întreg sistemul (metoda solidificării):

$$\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{oriz} = 0\right) : F + 3\mathrm{F} - 4F = 0.$$

Pentru determinarea lui H_B și V_B, pe unul din cele două corpuri se pot scrie ecuații de proiecție pe orizontală, respectiv verticală. Rezultă:

$$\left(\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{oriz}\right)_{A-B} = 0\right) : F - H_B = 0 \Rightarrow H_B = F;$$

$$\left(\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{vert}\right)_{A-B} = 0\right) : 1{,}5F - 4F + V_B = 0 \Rightarrow V_B = 2{,}5F.$$

Verificarea acestor rezultate se face scriind două ecuații de proiecție, similare cu cele precedente, dar pentru corpul $B - C$

$$\left(\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{oriz}\right)_{B-C} = 0\right) : F + 3F - 4F = 0;$$

$$\left(\left(\sum pr(\overline{F}_i)_{vert}\right)_{A-B} = 0\right) : 2{,}5F - 2{,}5F = 0.$$

Teste

T.5.1. Condiția necesară pentru ca o grindă cu zăbrele plană alcătuită din n noduri și b bare să formeze un sistem indeformabil din punct de vedere geometric este:

a) $b \le 2n - 3$; *b*) $b \ge 2n - 3$;

c) $b \le 3n - 6$; *d*) $b \ge 3n - 6$.

T.5.2. Care din următoarele afirmații este adevărată:

a) În cadrul unui sistem de corpuri forțele de legătură exterioare formează un sistem nul;

b) În cadrul unui sistem de corpuri forțele de legătură interioare au torsorul nul într-un punct;

c) În cadrul unui sistem de corpuri forțele de legătură exterioare au torsorul nul într-un punct;

d) În cadrul unui sistem de corpuri forțele de legătură interioare

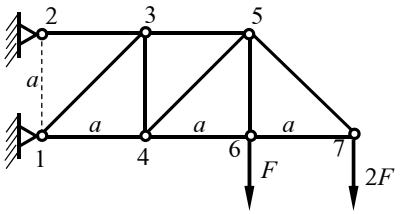


Fig. 5.11.

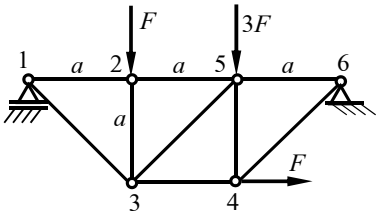


Fig. 5.12.

formează un sistem nul;

T.5.3. Pentru grinda cu zăbrele din figura 5.11 efortul secțional din bara 5 – 3 este:

a) $N_{5\text{-}3} = 4\text{F}$; *b*) $N_{5\text{-}3} = 5\text{F}$;

c) $N_{5\text{-}3} = 3\text{F}$; *d*) $N_{5\text{-}3} = \text{F}$.

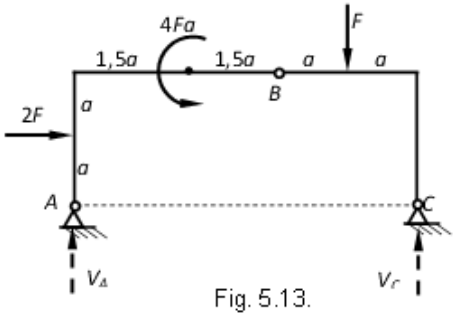


Fig. 5.13.

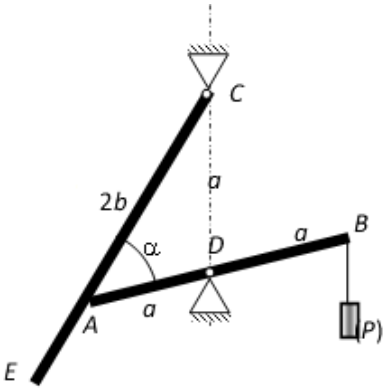


Fig. 5.15.

T.5.4. Pentru grinda cu zăbrele din figura 5.12 efortul secțional din bara 3 – 4 este:

a) $N_{3\text{-}4} = 2\text{F}$; *b*) $N_{3\text{-}4} = 5\text{F}$;

c) $N_{3\text{-}4} = 3\text{F}$; *d*) $N_{3\text{-}4} = \text{F}$

T.5.5. Pentru sistemul de cadre din figura 5.13 forțele de legătură exterioare verticale din *A* și *C* au valorile:

a) $V_A = 0{,}3F$; $V_C = 0{,}7F$; *b)* $V_A = 0{,}8F$; $V_C = 0{,}2F$;

c) $V_A = 0{,}6F$; $V_C = 0{,}4F$; *d*) $V_A = 0{,}1F$; $V_C = 0{,}9F$.

T.5.6. Două bare omogene *AB* (fig.5.15) de lungime 2*a* și *CE*, de lungime 2*b* și greutate *Q* se pot roti într-un plan vertical: prima în jurul mijlocului său *D*, a doua în jurul articulației *C*, situată pe aceeași verticală cu *D* la distanța *CD* = *a*. De capătul *B* al barei *AB* este legată o greutate *P*. Bara *AB* sprijinindu-se cu capul *A* pe bara *CE*, o înclină din poziția ei verticală. În poziția de echilibru unghiul *CAD* = α are valoarea:

a) $\alpha_1 = \arcsin\dfrac{Qb}{4Pa}$; $\alpha_2 = 0$;

b) $\alpha_1 = \arcsin\dfrac{Pb}{4Qa}$; $\alpha_2 = 0$;

c) $\alpha_1 = \arccos\dfrac{Qb}{4Pa}$; $\alpha_2 = 0$;

d) $\alpha_1 = \arcsin\dfrac{Pb}{4Qa}$; $\alpha_2 = 0$.

Rezistenţa materialelor

1. NOŢIUNI FUNDAMENTALE

În cadrul mecanicii teoretice corpurile au fost considerate ca fiind perfect rigide. În realitate, sub acţiunea forţelor exterioare şi a mişcării, corpurile se deformează şi chiar se pot distruge producând pagube.

Partea mecanicii care studiază mecanica mediilor deformabile este Mecanica aplicată. Aceasta are drept obiect de studiu solidul perfect elastic, solidul perfect plastic, mecanica fluidelor ideale şi a celor reale.

Cu aspectele teoretice ale mecanicii aplicate se ocupă: Teoria elasticităţii, Teoria plasticităţii şi Mecanica fluidelor, iar cu problemele practice: Mecanica construcţiilor (adică Statica, Dinamica şi Stabilitatea Construcţiilor), Rezistenţa materialelor şi Hidraulica.

Rezistenţa materialelor, care are drept obiect de studiu efectele interne ale forţelor aplicate asupra corpurilor deformabile, furnizează cunoştinţele necesare proiectării şi exploatării în deplină siguranţă şi cu eficienţă economică, a construcţiilor de orice fel, de la cele mai simple la aparate şi maşini extrem de complexe.

1.1. CLASIFICAREA CORPURILOR

Elementele constitutive ale construcţiilor, maşinilor şi utilajelor, prin care se asigură funcţionarea, rezistenţa şi durabilitatea acestora, pe toată durata de exploatare, sunt modelate de Rezistenţa materialelor drept corpuri solide sau simple corpuri.

În funcţie de dimensiunile lor geometrice, în formă schematizată, corpurile se împart în trei mari grupe: bare, plăci şi corpuri masive (blocuri).

1.1.1. Bare

Barele sunt corpuri care au o dimensiune (şi anume lungimea) cu mult mai mare decât celelalte două (lăţimea şi grosimea). Ele sunt caracterizate prin axa longitudinală şi secţiunea plană şi dreaptă (secţiunea transversală) (fig.1.1, *a*).

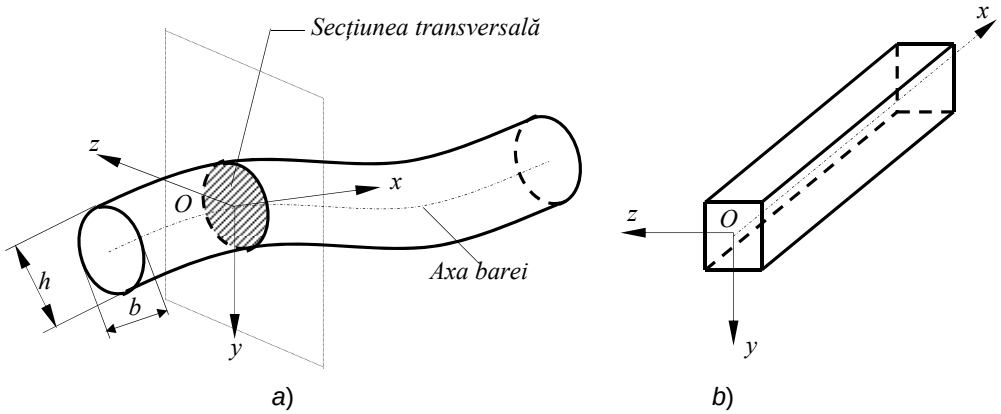


Fig. 1.1.

Secțiunea transversală rezultă din intersecția barei cu un plan perpendicular pe tangenta la axa barei. Axa longitudinală (axa barei) reprezintă locul geometric al centrele de greutate ale secțiunilor transversale ale barei. După forma axei, barele se clasifică în: bare drepte (axa barei este o linie dreaptă, fig. 1.1, *b*), bare cotite (axa este o linie frântă plană sau spațială) şi bare curbe (axa este o linie curbă plană sau strâmbă, fig. 1.1, *a*).

Dimensiunile caracteristice ale unei bare sunt: l – lungimea axei barei; b, h – dimensiunile secțiunii transversale.

Pentru calculele de rezistență, barele se schematizează prin axa lor, fapt ce face ca ele să fie numite şi corpuri cu fibră medie.

1.1.2. Plăci

Corpurile care au una din dimensiuni, şi anume grosimea, mult mai mică decât celelalte două (lungime şi lățimea), se numesc plăci. Ele sunt caracterizate prin suprafața mediană şi prin grosimea h (fig. 1.2, *a*).

Grosimea h, într-un punct al plăcii, se măsoară după direcția normalei la suprafața mediană, în punctul respectiv. Suprafața mediană este constituită de locul geometric al punctelor ce marchează jumătăților segmentelor de lungime h.

Plăcile pot fi subțiri dacă $h << l$ şi $h << l'$, caz în care ele se schematizează prin suprafața lor mediană, de grosime medie sau plăci groase.

În funcție de forma suprafeței mediane, plăcile pot fi plane (fig. 1.2, *b*), cu simplă curbură (fig. 1.2, *c*) sau cu dublă curbură (fig. 1.2, *d*).

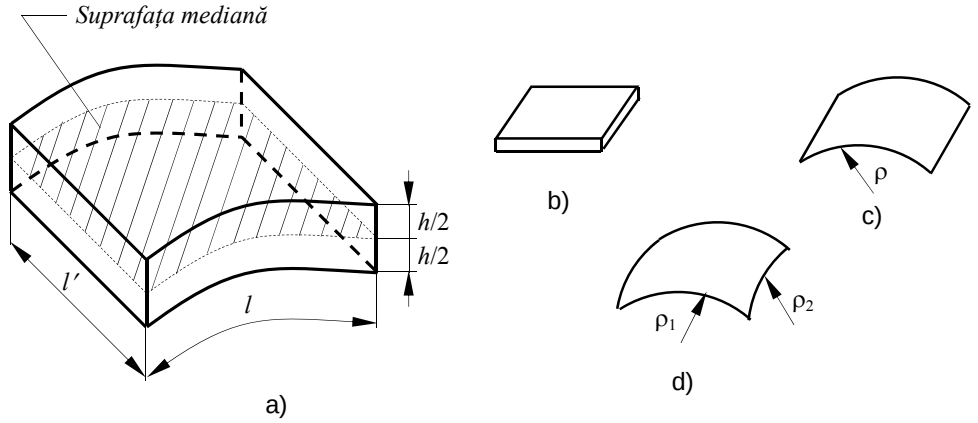


Fig. 1.2.

După forma conturului suprafeței mediane plăcile plane pot fi: dreptunghiulare, circulare, triunghiulare etc.

Dacă raportul h/ρ (ρ – raza de curbură) se poate neglija față de unitate, atunci, placa este o placă subțire şi poartă denumirea de membrană. Calculele de rezistență aferente plăcilor sunt mult mai dificile decât în cazul barelor.

1.1.3. Corpuri masive (blocuri)

Corpurile cu toate cele trei dimensiuni (lungime, lățime, grosime) comparabile sunt denumite corpuri masive sau blocuri. Aceste corpuri nu pot fi schematizate, iar calculele de rezistență, în acest caz, sunt deosebit de complexe.

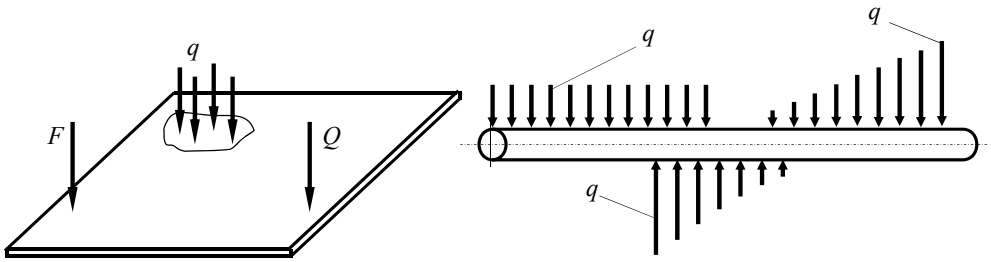
1.2. CLASIFICAREA ÎNCĂRCĂRILOR

Solicitările exterioare care produc deformarea corpurilor sunt numite încărcări. Din punct de vedere al calculului de rezistență, încărcările se clasifică în funcție de: suprafața pe care sunt distribuite, poziția punctelor de aplicație, variația în timp a intensității.

În funcție de suprafața pe care se distribuie, forțele se împart în:

– forțe concentrate, care se aplică, teoretic, într-un singur punct (fig. 1.3, *a*);

– forțe distribuite pe o suprafață sau pe o linie (fig. 1.3).



a) b)

Fig. 1.3.

Legea de variație a forțelor distribuite după o line poate fi: constantă, liniară parabolică etc. (fig. 1.3, *b*)

Forțele concentrate (*F* şi *Q* din fig. 1.3, *a*) se măsoară în N, cele distribuite pe o linie (fig. 1.3, *b*) în N/m, iar cele distribuite pe o suprafață (*q* din fig. 1.3, *a*) în N/m^2.

În funcție de poziția punctelor de aplicație, forțele se clasifică în:

– forțe care se aplică pe suprafața corpului, provenind din interacțiunea cu alte corpuri;

– forțe de volum sau masice (care provin din greutatea proprie a corpului) şi forțele de inerție.

În funcție de poziția în timp a punctelor de aplicație, forțele se clasifică în:

– forțe fixe, ale căror puncte de aplicație rămân mereu aceleaşi pe toată durata aplicării lor;

– forțe mobile, ale căror puncte de aplicație se schimbă în timp.

După variația în timp a intensității forțelor, se disting:

– încărcări statice, la aplicarea cărora nu este necesară luarea în considerare a forțelor de inerție deoarece intensitatea forțelor creşte suficient de încet, viteza de încărcare fiind considerată, teoretic, egală cu zero;

– încărcări dinamice, la aplicarea cărora apar vibrații şi şocuri.

În funcție de efectele interne pe care le produc, încărcările se împart în:

– încărcări constante, la care efectele interne sunt aceleaşi pe toată durata solicitării;

– încărcări variabile, la care efectele interne produse de acestea, variază în timp.

1.3. EFORTURI SECŢIONALE

Dacă se secţionează, cu un plan, un solid rigid acţionat de un sistem de forţe aflat în echilibru (fig. 1.4, *a*), pe feţele celor două corpuri astfel obţinute trebuie introduse forţele de legătură (egale şi direct opuse) ce se manifestă între punctele ce aparţin acestora. Sistemele forţelor de legătură ce apar pe cele două secţiuni ale corpului, reduse în centrele de greutate ale acestora, conduc la obţinerea unui vector rezultant $\overline{R}$ şi a unui vector moment rezultant $\overline{M}_O$ care au cunoscute doar punctul de aplicaţie (fig. 1.4, *b*).

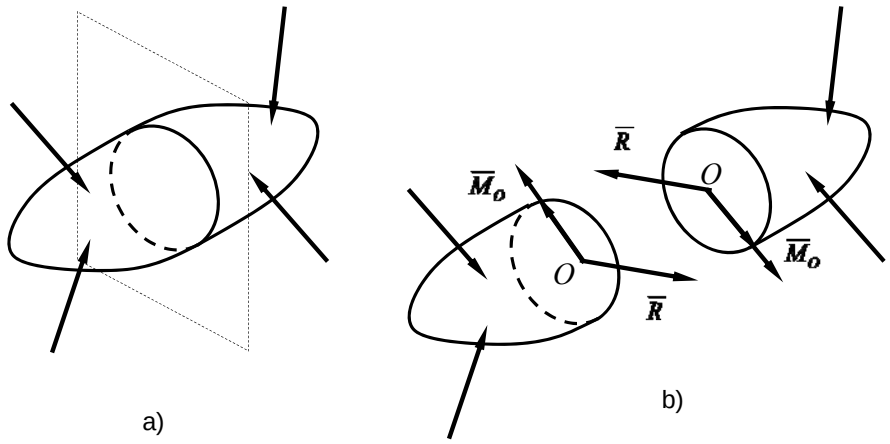


Fig. 1.4.

În cazul unei bare aflate în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare (fig. 1.5, *a*) prin secţionarea acestei cu un plan normal pe axa ei, se obţin două părţi, bara *I* aflată în stânga secţiunii şi bara *II* aflată în dreapta secţiunii (fig. 1.5, *a*). Izolând bara *II*, pe secţiunea transversală a acesteia trebuie introduse forţele de legătură ce se manifestă între cele două bucăţi de bară şi care reprezintă efectul mecanic al părţii înlăturate asupra părţii rămase. Acest lucru se realizează cu ajutorul torsorului acestor forţe de legătură, calculat în centrul de greutate al secţiunii transversale considerate, $T_O(\overline{R}, \overline{M}_O)$. Descompunerea vectorului rezultant $\overline{R}$ şi a vectorului moment rezultant $\overline{M}_O$

pe axele sistemului de referință adoptat (axa *Ox* are acelaşi sens cu sensul de parcurgere şi este tangentă la axa barei în punctul *O*, axele *Oy* şi *Oz* sunt cuprinse în planul secțiunii transversale) conduce la obținerea eforturilor secționale.

Din descompunerea vectorului rezultant $\overline{R}$ rezultă următoarele componente:

N – numit *efort axial* sau *forță axială*; este pozitiv când este în sens invers axei *Ox*, atunci când este aplicat pe fața din dreapta secțiunii (cea în care axa *Ox* intră, fig. 1.5, *c*) şi în sensul axei *Ox* când este aplicată pe fața din stânga secțiunii (cea din care axa *Ox* iese, fig. 1.5, *b*), sau, mai general, când trage de secțiunea pe care se aplică.

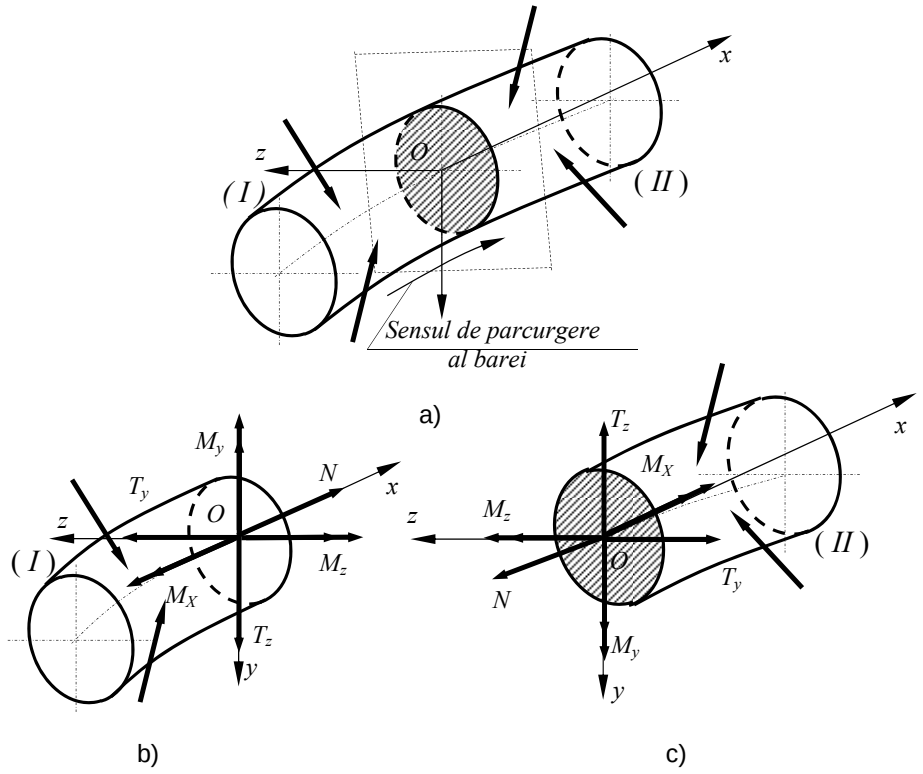


Fig. 1.5.

T_y , T_z – *eforturi tăietoare* sau *forțe tăietoare*; sunt pozitive când sunt în sens invers axelor *Oz*, respectiv *Oy*, atunci când sunt aplicate pe fața din dreapta secțiunii (v.fig.1.5, *c*) şi în sensul axelor *Oz*, respectiv *Oy*, când sunt aplicate pe fața din stânga secțiunii (fig. 1.5, *b*), sau, mai general, atunci când rotesc pozitiv

corpul pe care sunt aplicate.

M_x – *moment de răsucire* sau *moment de torsiune*; este pozitiv când vectorul său este dirijat în sensul pozitiv al axei *Ox*, atunci când este aplicat pe fața din dreapta secțiunii (v. fig. 1.5, *c*) .

M_y, M_z – *momente de încovoiere*; sunt pozitive când vectorii lor sunt dirijați în sensul pozitiv al axelor *Oy*, respectiv *Oz*, atunci când sunt aplicați pe fața din dreapta secțiunii (v. fig. 1.5, *c*).

1.4. CLASIFICAREA SOLICITĂRILOR

În funcție de particularitățile sistemului de forțe aplicat barei, într-o secțiune transversală oarecare a acesteia, pot exista unul, două sau chiar toate eforturile secționale. Denumirea solicitării barei se stabileşte în funcție de eforturile secționale nenule.

Astfel, dacă în secțiunea barei apare numai forța axială *N* solicitarea este de *întindere* sau *compresiune* după cum *N* este pozitiv sau negativ. Solicitarea de compresiune este definită în acest caz numai pentru barele foarte groase, la care pericolul pierderii stabilității echilibrului în starea deformată a barei (flambajul) este mic sau inexistent.

Dacă în secțiunea transversală a barei apare, ca urmare a solicitărilor, numai forța tăietoare T_z sau T_y, solicitarea este de *forfecare pură*.

Atunci când în secțiunea transversală a barei apare numai momentul încovoietor M_y sau M_z, solicitarea este de *încovoiere pură*. Dacă, pe lângă momentul încovoietor M_z apare şi forța tăietoare T_z, sau pe lângă M_y apare şi T_y, solicitarea este de *încovoiere simplă*.

Când în planul secțiunii transversale, ca urmare a solicitărilor la care bara este supusă, se dezvoltă momentul de răsucire M_x, solicitarea este numită *torsiune* sau *răsucire*.

Aceste solicitări sunt denumite generic *solicitări simple*.

Solicitările în care în secțiunea transversală a barei apar două sau mai multe eforturi secționale dintre *N*, M_x, M_y, M_z se numesc *solicitări compuse*. Dintre acestea menționam următoarele:

– *încovoiere oblică* sau *dublă*; în secțiunea transversală a barei apar eforturile secționale M_z şi M_y;

– *încovoiere simplă cu forță axială*; în secțiunea transversală a barei apar eforturile secționale *N* şi M_z sau *N* şi M_y;

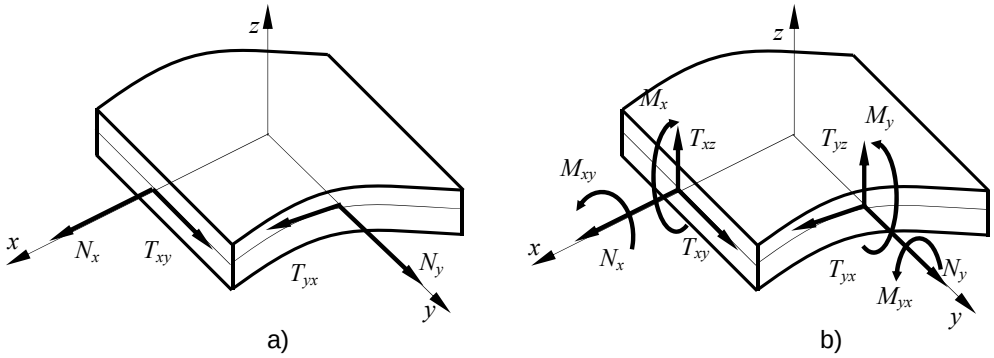


Fig. 1.6

– *încovoiere dublă cu forță axială*; în secțiunea transversală a barei apar eforturile secționale N, M_z şi M_y;

– *încovoiere cu torsiune*; în secțiunea transversală a barei apar eforturile secționale (M_x, M_z) sau (M_x, M_y) sau (M_x, M_y, M_z).

Solicitările plăcilor subțiri în baza cărora se efectuează calculul de rezistență al acestora se împart în:

– solicitări în teoria de membrană, atunci când pe secțiunile plăcii apar numai eforturi secționale de natura forțelor, cuprinse în planul suprafeței mediane (fig. 1.6, *a*);

– solicitări în teoria de momente atunci când pe lângă eforturile de natura forțelor apar şi eforturi – cupluri (fig. 1.6, *b*).

1.5. TENSIUNI. TENSORUL TENSIUNILOR

Dacă dintr-un corp raportat la un sistem de referință $xOyz$ se eliberează o particulă elementară de volum $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ situată într-un punct oarecare P de coordonate (x,y,z), pe fețele acesteia trebuie introduse acțiunile particulelor învecinate, rezultate din aplicarea forțelor exterioare asupra corpului şi din mişcarea acestuia. Aceste acțiuni, ce se manifestă pe întreaga suprafață a fiecărei fețe a particulei, vor fi reprezentate prin forțe distribuite pe aceste fețe, care apar ca forțe efectiv aplicate pentru particula respectivă.

Fețele particulei fiind foarte mici se poate admite că aceste forțe se repartizează uniform pe fiecare față a acesteia. Astfel, pentru fiecare față a particulei, aceste forțe uniform distribuite se pot reduce la o forță elementară $\Delta\overline{F}_{\nu}$ aplicată în centrul de greutate al feței respective orientată prin normala $\overline{\nu}$.

Identificarea forţei elementare $\Delta\overline{F}_\nu$ se face prin indicele $\overline{\nu}$ care reprezintă normala la planul pe care se dezvoltă această forţă.

Forţele elementare $\Delta\overline{F}_\nu$ sunt denumite *eforturi elementare*.

Rezultă că, datorită mişcării şi forţelor exterioare aplicate asupra corpului, în fiecare punct $P(x,y,z)$ al acestuia se dezvoltă o stare de eforturi, cuprinzând toate eforturile elementare $\Delta\overline{F}_\nu$ care apar pe diferitele suprafeţe elementare ΔA, ce aparţin

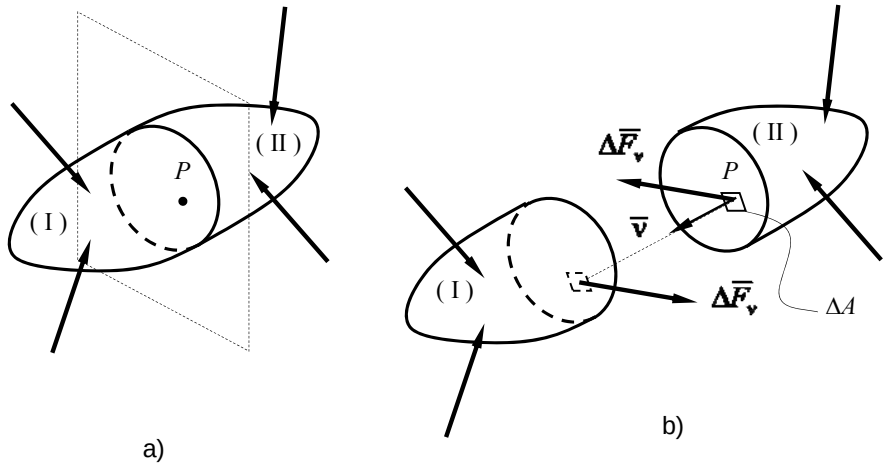


Fig. 1.7.

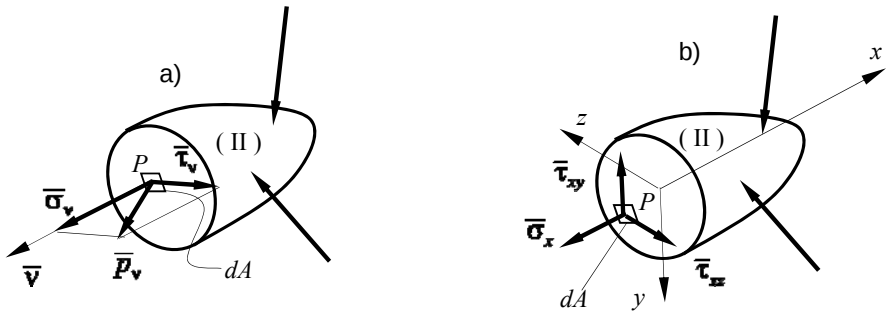
diferitelor plane, orientate prin normalele $\overline{\nu}$, care conţin punctul P.

Fie un corp raportat la un sistem de referinţă $xOyz$ şi solicitat de un sistem de forte în echilibru (fig. 1.7, *a*). Dacă prin punctul oarecare P de coordonate (x,y,z), ce aparţine acestui corp, se duce un plan de secţionare, se obţin două corpuri *I* şi *II* (fig. 1.7, *b*). Pe suprafeţele, din planul de secţionare, ale corpului *I*, respectiv *II* se consideră un element de arie ΔA. Forţa de legătură dintre corpurile *I* şi *II*, corespunzătoare elementului de arie ΔA este reprezentată de efortul elementar $\Delta\overline{F}_\nu$ (fig. 1.8, *b*).

Deoarece efortul elementar $\Delta\overline{F}_\nu$ depinde de mărimea ΔA, a suprafeţei pe care se aplică, se poate elimina această dependenţă definind o mărime vectorială (fig. 1.8, *a*):

$$\overline{p}_\nu = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\overline{F}_\nu}{\Delta A} \tag{1.1}$$

denumită *tensiune totală*. Această mărime este o *mărime tensorială* deoarece depinde atât de efortul elementar $\Delta\overline{F}_\nu$ (care este o mărime vectorială) cât şi de orientarea elementului ΔA dată de versorul $\overline{\nu}$.



a) b)

Fig. 1.8.

Vectorul tensiune totală $\overline{p}_\nu$ se descompune după direcția versorului normalei $\overline{\nu}$ şi după o direcție cuprinsă în planul elementului de arie ΔA (fig. 1.8, *a*). In acest mod se obțin două componente: componenta $\overline{\sigma}_\nu$, denumită *tensiune normală*, dirijată după versorul normalei $\overline{\nu}$ şi componenta $\overline{\tau}_\nu$, denumită *tensiune tangențială*, orientată după o direcție oarecare cuprinsă în planul elementului de arie ΔA.

Deoarece $\overline{\sigma}_\nu$ şi $\overline{\tau}_\nu$ sunt perpendiculare între ele se poate scrie:

$$p_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2 . \tag{1.2}$$

Dacă se alege un sistem de referință cu axele *Oy* şi *Oz* cuprinse în planul elementului de arie ΔA şi axa *Ox* după direcția versorului $\overline{\nu}$, astfel încât să formeze un triedru drept, atunci tensiunile ce apar în planul *yOz* sunt (fig. 1.8, *b*):

– σ_x – tensiunea din planul cu versorul normalei dirijat după axa *Ox*. Ea poartă numele de *tensiune normală* şi este pozitivă când este orientată în sensul negativ al axei *Ox*;

– τ_{xy} şi τ_{xz} – *tensiunile tangențiale* din planul cu versorul normalei dirijat după axa *Ox*, paralele cu axele *Oy*, respectiv *Oz*. Ele provin din descompunerea tensiunii tangențiale τ_ν şi sunt pozitive când sunt orientate în sensul negativ al axelor în raport cu care sunt paralele.

Dacă se va proceda analog şi pentru planele ce au versorii dirijați după axa *Oy*, respectiv axa *Oz*, se obțin cele nouă componente ale *tensorului tensiunilor* în punctul *P*, a cărui formă matriceală este:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

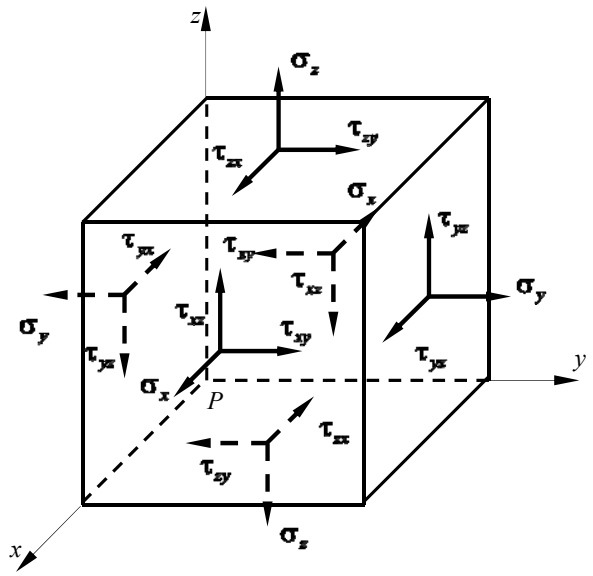


Fig. 1.9.

Componentele tensorului tensiunilor dintr-un punct *P* oarecare al unui corp, pot fi vizualizate pe feţele unui element de volum elementar de forma unui cub cu muchiile orientate după axele de coordonate aşa cum este ilustrat în figura 1.9.

1.5.1. Teorema dualităţii tensiunilor tangenţiale

Se izolează dintr-un corp o particulă elementară de formă tetraedrică (*PBCD*) din punctul $P(x,y,z)$ şi se reprezintă tensiunile ce se dezvoltă pe feţele acesteia (fig. 1.10).

Se consideră că tensiunile au punctele de aplicaţie în centrele de greutate ale suprafeţelor pe care se manifestă, adică în centrele de greutate ale triunghiurilor. Forţele la care particula este supusă sunt forţele generate de tensiuni (a căror mărime se obţine înmulţind valoarea tensiunii cu aria suprafeţei pe care se manifestă) şi forţele masice. Greutatea particulei se poate neglija deoarece ea este o cantitate mică de ordin superior ($g\rho \mathrm{d}V = g\rho \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{6}$) faţă de forţele date de tensiuni ($\sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z, \sigma_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z$, etc.).

Sub acţiunea acestor forţe particula elementară este în echilibru.

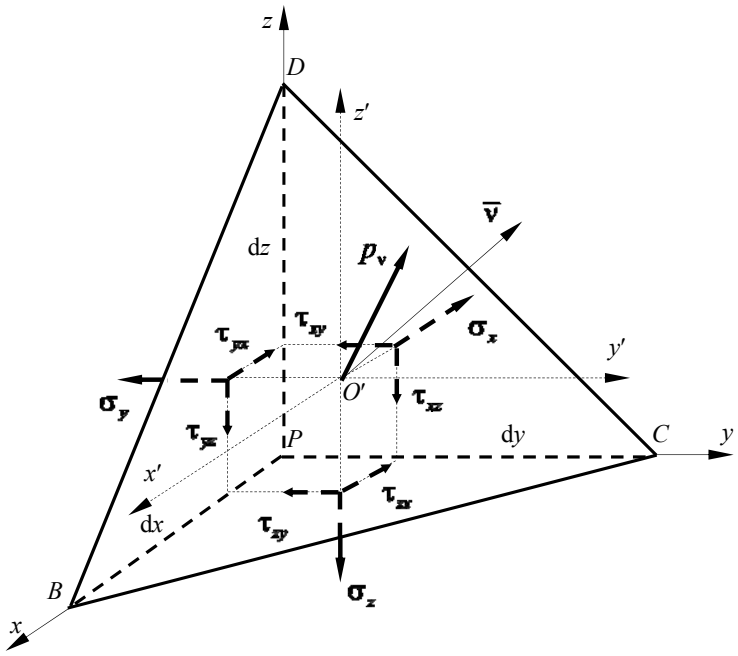


Fig. 1.10.

Dacă se scrie o ecuație de moment în raport cu o axă $O'z'$, paralelă cu axa Pz, ce trece prin punctul de aplicație al tensiunii totale p_ν, singurele forțe ce dau moment sunt $\tau_{xy} \cdot \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2}$ şi $\tau_{yx} \cdot \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{2}$, ale căror brațe sunt $\frac{\mathrm{d}x}{3}$, respectiv $\frac{\mathrm{d}y}{3}$. Ecuația de moment va fi în acest caz:

$$\tau_{xy} \cdot \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{3} - \tau_{yx} \cdot \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{3} = 0. \tag{1.4}$$

Rezultă:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.5}$$

Dacă, prin analogie, se scriu încă două ecuații de moment în raport cu axe $O'x'$ şi $O'y'$ paralele cu axa Px, respectiv Py, ce trec prin punctul de aplicație al tensiunii totale p_ν se obține:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ şi } \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.6}$$

Relațiile (1.5) şi (1.6) exprimă analitic *teorema dualității tensiunilor tangențiale* care se enunță astfel: pe două plane perpendiculare unul pe celălalt,

care trec printr-un punct oarecare *P* din interiorul unui corp, tensiunile tangenţiale se dezvoltă în aşa fel încât componentele lor perpendiculare pe linia de intersecţie a celor două plane, sunt egale ca mărime şi simetric dispuse faţă de muchia comună a celor două plane.

In baza acestei teoreme se deduce că tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$, precizat de relaţia (1.3), este un tensor simetric faţă de diagonala principală şi are numai şase componente independente.

Dacă se notează cu $\overline{p}_x$ vectorul tensiune totală din planul cu versorul normalei dirijat după axa *Px* (faţa *PCD* a tetraedrului din fig. 1.10) şi, analog, $\overline{p}_y$ şi $\overline{p}_z$ tensiunile totale din planele ai căror versori sunt dirijaţi după axa *Py*, respectiv *Pz*, se poate scrie:

$$\begin{aligned} \overline{p}_x &= \sigma_x \overline{i} + \tau_{xy} \overline{j} + \tau_{xz} \overline{k}\,; \\ \overline{p}_y &= \tau_{yx} \overline{i} + \sigma_y \overline{j} + \tau_{yz} \overline{k}\,; \\ \overline{p}_z &= \tau_{zx} \overline{i} + \tau_{zy} \overline{j} + \sigma_z \overline{k}\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Deoarece vectorii tensiune totală exprimaţi prin relaţiile (1.7) au componentele orientate în sens invers axelor de coordonate, iar componentele tensiunii totale $\overline{p}_\nu = p_{\nu x}\overline{i} + p_{\nu y}\overline{j} + p_{\nu z}\overline{k}$ din planul cu versorul normalei $\overline{\nu}$, se consideră pozitive în sensul axelor de coordonate la care s-a raportat particula elementară *PBCD*, ecuaţia de echilibru, sub formă vectorială, în cazul neglijării forţelor masice, capătă forma:

$$\overline{p}_\nu \mathrm{d}A - \left(\overline{p}_x \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2} + \overline{p}_y \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{2} + \overline{p}_z \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2} \right) = 0 \tag{1.8}$$

şi ea permite, prin proiectarea ei pe axele sistemului de referinţă, determinarea componentelor $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$, $p_{\nu z}$ în funcţie de componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ în punctul $P(x,y,z)$. Cunoscând aceste componente se poate calcula tensiunea totală $\overline{p}_\nu$ şi deoarece planul pe care se dezvoltă aceasta tensiune este un plan oarecare, se deduce că, în funcţie de componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$, se poate determina tensiunea totală pe orice plan ce trece prin punctul *P*. Rezultă că tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ caracterizează complet stare de tensiuni dintr-un punct *P* din interiorul unui corp.

1.5.2. Tensorul tensiunilor în cazul barelor

Pentru bare cu secțiune constantă, în cadrul Rezistenței materialelor s-au introdus anumite ipoteze care au drept scop uşurarea considerabilă a determinării componentelor tensorului tensiunilor.

Astfel, bara se consideră ca fiind alcătuită din fibre care nu se apasă şi nu lunecă între ele în direcție normală pe axa ei.

Drept consecință a acestei ipoteze în toate planele longitudinale tensiunile normale şi tensiunile tangențiale perpendiculare pe axa barei sunt nule.

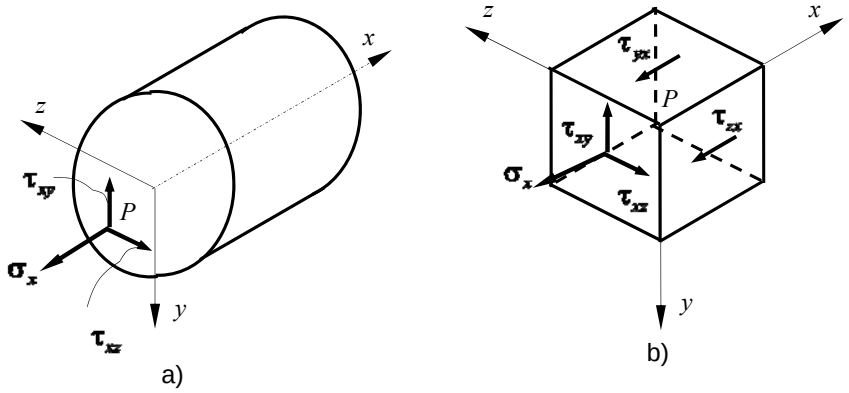


Fig. 1.11.

Dacă se izolează o particulă elementară din punctul *P* din interiorul barei (fig. 1.11, *a*) pe fețele sale paralele cu planele sistemului de referință apar numai tensiunile σ_x, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz} şi τ_{zx}, reprezentate in figura 1.11, *b*.

Rezultă că în cazul barelor tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ are forma:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

ceea ce arată că starea de tensiuni dintr-un punct oarecare din interiorul unei bare este complet determinată dacă se cunosc tensiunile σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} din planul secțiunii transversale ce trece prin punctul respectiv.

1.6. DEFORMAŢII SPECIFICE. TENSORUL DEFORMAŢIILOR SPECIFICE

Sub acţiunea forţelor exterioare efectiv aplicate şi a mişcării fiecare particulă din corp va suferi o deplasare (o translaţie şi/sau o rotaţie) şi o deformare cauzată de mişcare relativă între punctele corpului.

În punctul P de coordonate (x, y, z), dintr-un corp aflat în echilibru, se consideră o particulă elementară sub formă de cub cu laturile dx, dy, dz, orientată după axele sistemului de coordonate rectangular $Oxyz$ (fig. 1.12).

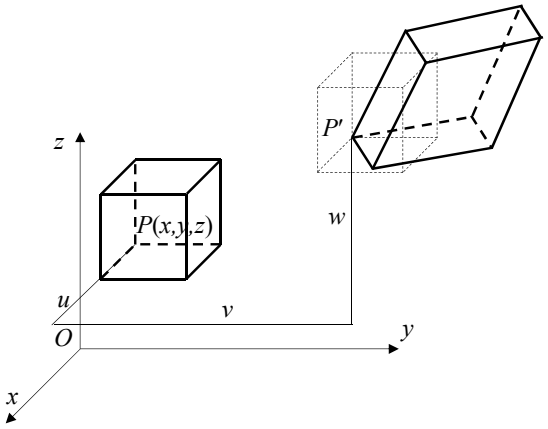


Fig.1.12.

În urma aplicării asupra corpului a unui sistem de forţe, cubul se deplasează din poziţia corespunzătoare punctului P în poziţia corespunzătoare punctului P' şi în acelaşi timp se şi deformează, astfel că muchiile îşi modifică lungimile şi poziţiile relative dintre ele (fig. 1.12).

Dacă se consideră numai o faţă a cubului care se deplasează în planul său (de exemplu faţa cubului paralelă cu planul xOy fig. 1.13) se definesc ca deplasări mărimile u si v. Pentru definirea deformaţiilor muchiilor elementare se introduce noţiunea de *deformaţie specifică liniară* care este egală cu raportul dintre variaţia lungimii unui segment şi lungimea ei iniţială. În conformitate cu această definiţie, deformaţia specifică liniară a particulei elementare pe direcţia axei Ox este (fig. 1.13):

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{a_1 d_2} - \overline{ad}}{\overline{ad}} = \frac{\left(\mathrm{d}x + u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x - u\right) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1.10)$$

iar deformaţia specifică liniară pe direcţia axei Oy

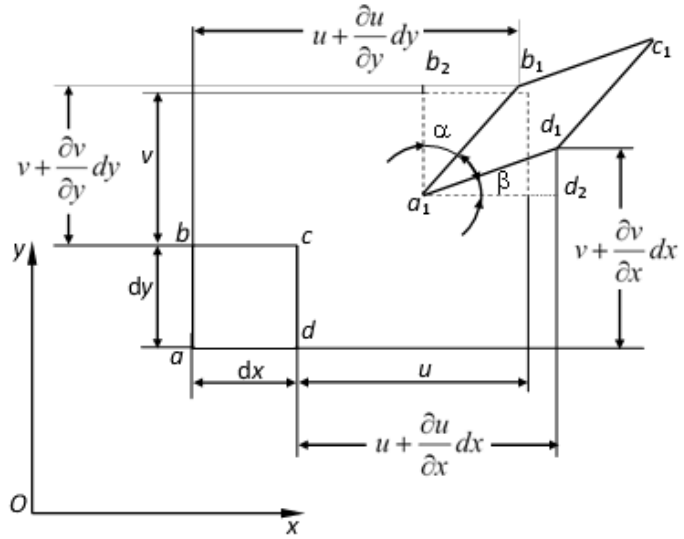


Fig. 1.13.

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{a_1b_2} - \overline{ab}}{\overline{ab}} = \frac{\left(\mathrm{d}y + v + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y - v\right) - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1.11}$$

Analog se poate scrie:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.12}$$

Concomitent cu modificarea lungimilor muchiilor, se produce şi o modificare a unghiurilor drepte (diedre). Variația acestor unghiuri este definită ca *deformație specifică unghiulară* sau *lunecare specifică*. Aceasta este egală cu variația, în radiani, a unghiului format de doua muchii perpendiculare (sau, în caz general, a două drepte perpendiculare) şi este pozitivă când corespunde micşorării unghiului dintre direcțiile pozitive ale axelor.

În planul *Oxy*, cu notațiile din figura 1.13, deformația specifică unghiulară γ_{xy} provine din rotirea muchiilor *ab*, respectiv *ad*, în raport cu starea lor precedentă, şi este egală cu suma unghiurilor α şi β. Se constată că:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{b_1b_2}}{\overline{a_1b_2}} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) - u}{\mathrm{d}y + v + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1+\varepsilon_y}; \tag{1.13}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{d_1 d_2}}{\overline{a_1 d_2}} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - v}{\mathrm{d}x + u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}. \tag{1.14}$$

Deoarece ε_x şi ε_y sunt neglijabile în comparație cu unitatea, iar α şi β sunt foarte mici, se poate scrie:

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \beta = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.15}$$

Lunecarea specifică în planul *xOy* (micşorarea unghiului $\angle bad$) în conformitate cu cele prezentate anterior este:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.16}$$

Pentru celelalte plane de coordonate, procedând analog, deformațiile specifice

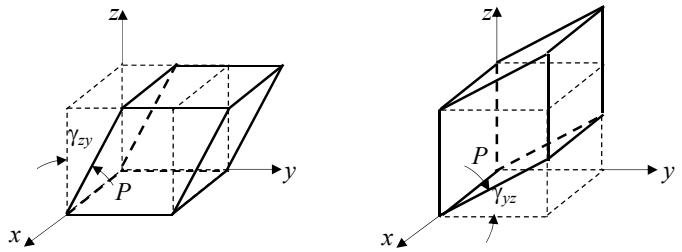


Fig. 1.14.

unghiulare au expresiile:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{1.17}$$

Se poate observa că modificarea aceluiaşi unghi drept se poate obține prin lunecarea a două fețe ale cubului elementar (fig. 1.14): fața ce are versorul normalei dirijat după *Oz* se deplasează în sensul axei *Oy* şi produce lunecarea specifică γ_{zy}, iar fața ce are versorul normalei dirijat după *Oy* se deplasează în sensul axei *Oz* şi produce lunecarea specifică γ_{yz}. Cum cele două deplasări produc modificarea aceluiaşi unghi drept rezultă că:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \tag{1.18}$$

Prin analogie:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}\ ;\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx}. \tag{1.19}$$

Dacă se consideră deformațiile specifice liniare şi cele unghiulare care se produc în cele trei plane de coordonate care trec printr-un punct P din interiorul unui corp şi se pun într-un tablou de forma:

$$\mathbf{T}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

se obține tensorul *deformațiilor specifice proprii* din punctul $P(x,y,z)$. Acest tensor este un tensor simetric față de diagonala principală în baza egalităților (1.18) şi (1.19).

Observații:

– Deoarece tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_{\sigma}$, precum şi tensorul deformațiilor specifice $\mathbf{T}_{\varepsilon}$ sunt definite într-un punct $P(x,y,z)$ din interiorul corpului, componentele acestora vor varia de la punct la punct, ele fiind funcții de coordonatele punctului în care se determină.

– Între componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_{\sigma}$ şi cele ale tensorului deformațiilor specifice proprii $\mathbf{T}_{\varepsilon}$ există relații de cauzalitate ceea ce face ca ele să nu fie independente unele față de altele. Aceste relații de cauzalitate sunt de natură fizică şi caracterizează din punct de vedere mecanic materialul din care este alcătuit corpul, ele stabilindu-se pe cale experimentală.

1.7. IPOTEZE DE LUCRU ŞI PROBLEMELE REZISTENŢEI MATERIALELOR

1.7.1. Ipoteze

Ipotezele utilizate de Rezistența materialelor se împart în două categorii. Prima categorie cuprinde ipotezele folosite în Mecanica teoretică şi preluate de Rezistența materialelor, iar a doua categorie cuprinde ipotezele specifice Rezistenței materialelor.

In prima categorie este inclusă *ipoteza independenţei* dintre spaţiu, timp şi masă. De asemenea, se identifică materia cu substanţa, se acceptă *ipoteza continuităţii* precum şi modelul de continuum pentru diferite corpuri din natură. In rezistenţa materialelor corpurile solide se consideră perfect omogene şi izotrope.

Din punct de vedere mecanic, ipoteza continuităţii are unele implicaţii importante:

a) In baza acestei ipoteze s-a introdus noţiunea de efort elementar $\Delta\overline{F}_{\mathrm{v}}$ (vezi paragraful 1.5) pe baza căreia s-a definit tensiunea totală $\overline{p}_{\mathrm{v}}$;

b) *Ipoteza micilor deformaţii* care stipulează că deformaţiile şi deplasările particulelor ce alcătuiesc corpul sunt mici în raport cu dimensiunile acestuia. Consecinţele acestei ipoteze sunt: dependenţa dintre deplasări şi deformaţii este liniară; ecuaţiile de echilibru se scriu pe forma nedeformată a corpului ceea ce conduce la o dependenţă liniară între eforturi şi forţele exterioare şi, în consecinţă, posibilitatea aplicării suprapunerii efectelor pentru calculul eforturilor;

c) Se consideră că *deformaţiile sunt elastice*, adică reversibile (dispar odată cu înlăturarea cauzelor care le-au produs). Această ipoteză permite aplicarea suprapunerii efectelor pentru calculul deplasărilor, deoarece dependenţa dintre deplasări şi forţele exterioare este liniară.

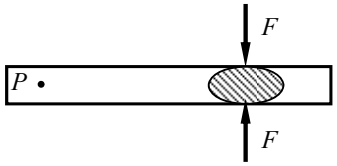


Fig. 1.15.

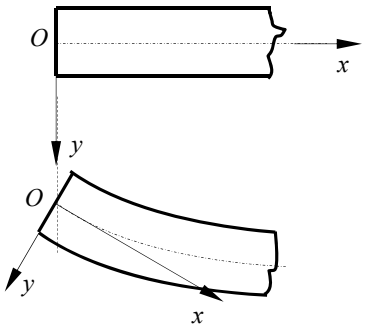


Fig. 1.16.

Aceste trei ipoteze sunt specifice Rezistenţei materialelor şi lor li se adaugă aşa numitul principiu al lui Saint-Venant care se enunţă astfel: un sistem de forţe aflat în echilibru, aplicat pe o zonă restrânsă pe suprafaţa unui corp, influenţează starea de tensiuni şi deformaţii a acestuia numai în apropierea zonei de aplicare a sarcinilor (v. fig. 1.15). Cu alte cuvinte, în punctul *P* din afara zonei haşurate, suficient de departe de aceasta, (fig. 1.15) nu există nicio stare de tensiune.

In cazul barelor, pe lângă ipoteza admisă în paragraful 1.5.2, pe baza căreia tensorul tensiunilor are forma (1.9) este admisă şi ipoteza lui Bernoulli, denumită *ipoteza secţiunilor plane*, care se enunţă astfel: o secţiune plană şi normală pe axa barei înainte de deformaţie rămâne plană şi normală pe axa barei şi după deformaţie (fig. 1.16).

1.7.2. Problemele rezistenţei materialelor

Rezistența materialelor are drept scop evaluarea structurilor sub solicitări astfel încât exploatarea acestora să se facă în deplină siguranță.

S-a văzut că, în baza ipotezei continuității, sub acțiunea forțelor exterioare şi a mişcării, în fiecare punct dintr-un corp se dezvoltă o stare de tensiuni, caracterizată de tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ (1.3) şi o stare de deformații, caracterizată de tensorul deformațiilor specifice $\mathbf{T}_\varepsilon$ (1.20) care variază de la un punct la altul.

Pe acest model, rezistența materialelor caută evaluări cantitative privind fenomenele care însoțesc un proces considerat periculos sau inadmisibil în exploatarea structurilor, cum este ruperea sau producerea şi dezvoltarea unor deformații permanente mari.

Astfel se consideră că fenomenele periculoase nu pot apare dacă:

– într-un punct al structurii tensiunea maximă efectivă nu depăşeşte o valoare limită admisibilă:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_a, \tag{1.21}$$

în care σ_a este tensiunea admisibilă;

– într-un punct al structurii deplasarea totală maximă efectivă nu depăşeşte o valoare maximă admisibilă:

$$\Delta_{\max} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \leq \Delta_a, \tag{1.22}$$

în care Δ_a este deplasarea admisibilă;

– forța maximă de solicitare nu depăşeşte o valoare critică:

$$F_{\max} \leq \frac{F_{cr}}{c}, \tag{1.23}$$

în care F_{cr} este forța critică şi c coeficientul de siguranță.

Condiția (1.21) constituie condiția de rezistență, (1.22) – condiția de deformație (rigiditate), iar (1.23) – condiția de stabilitate. Toate cele trei condiții exprimă problemele rezistenței materialelor şi ele se concretizează în:

a) *Dimensionarea structurilor*. Pentru o structură la care solicitările şi caracteristicile mecanice ale materialului din care este făcută, sunt cunoscute, se determină forma şi dimensiunile acesteia astfel condițiile (1.21) – (1.23) să fie îndeplinită;

b) *Verificarea structurilor*. O structură, definită ca formă şi dimensiuni, la care solicitările şi caracteristicile mecanice ale materialului din care este realizată sunt

cunoscute, trebuie să verifice condiţiile (1.21) –(1.23);

c) *Determinarea solicitării maxime*. Pentru o structură, definită ca formă şi dimensiuni, la care caracteristicile mecanice ale materialului din care este făcută, sunt cunoscute, valoarea maximă a solicitărilor este cea care îndeplineşte condiţii (1.21) –(1.23).

1.7.3. Coeficienţi de siguranţă. Rezistenţe admisibile

Valorile mărimilor σ_a, Δ_a şi F_{cr} se determină în funcţie de valorile maxime ale tensiunilor, deplasărilor, respectiv ale solicitărilor la care apar fenomenele periculoase.

Dacă într-un punct din interiorul unui corp se produce fenomenul periculos, atunci se consideră că în acel punct tensiunile au atins o valoare limită, adică s-a atins starea limită de tensiuni, care pentru o exploatare sigură a structurii nu trebuie depăşită.

De exemplu, pentru o bară supusă static la întindere, starea limită este atinsă atunci când tensiunea maximă intr-un punct al său este egală cu rezistenţa la tracţiune a materialului din care este făcută bara:

$$\sigma_{\max} = R_m \,. \tag{1.24}$$

Datorită unor serii de factori care intervin şi care pot modifica, independent de voinţa omului, tensiunea maximă efectivă este necesar ca între rezistenţa limită a materialului şi tensiunile maxime efective din timpul exploatării să existe o diferenţă. Această diferenţă poate fi mai mare sau mai mică, în funcţie de precizia evaluării factorilor care intervin. Dintre aceşti factori ce introduc incertitudini asupra tensiunii maxime $\sigma_{\max}$ putem aminti: incertitudini în evaluarea forţelor maxime, abateri de la dimensiunile prevăzute pentru piese şi erori de montaj; incertitudini asupra valorilor efective ale tensiunilor ca urmare a ipotezelor simplificatoare pe baza cărora au fost determinate. Pentru rezistenţa la tracţiune R_m amintim: neomogenitatea materialelor, posibilitatea reducerii în timp a rezistenţei materialului ca urmare a unor degradări prin coroziune, uzură, etc.

Prin definiţie mărimea:

$$c = \frac{R_m}{\sigma_{\max}}, \tag{1.25}$$

se numeşte *coeficient de siguranţă*.

Rezultă că tensiunea maximă efectivă trebuie să aibă cel mult valoarea:

$$\sigma_a = \frac{R_m}{c}, \tag{1.26}$$

denumită şi *rezistenţă admisibilă*.

La materialele ductile, ca limită de rezistenţă se foloseşte limita de curgere aparentă, R_e, caz în care:

$$\sigma_a = \frac{R_e}{c}. \tag{1.27}$$

Metoda de calcul bazată pe condiţia (1.21) este denumită *metoda rezistenţelor admisibile*.

1.8. ASPECTELE PROBLEMELOR REZISTENŢEI MATERIALELOR

Pentru rezolvarea problemelor Rezistenţei materialelor prezentate în subcapitolul 1.7, trebuie evaluate stările de tensiuni şi deformaţii ce se dezvoltă în punctele unei structuri. Pentru aceasta se folosesc cele trei aspecte ale problemelor de rezistenţa materialelor: aspectul static, aspectul geometric şi aspectul fizic.

1.8.1. Aspectul static

S-a văzut că într-o secţiune curentă a unei bare, pe faţa din dreapta secţiunii, se dezvoltă eforturile secţionale ce sunt reprezentate în figura 1.5, *c*. Pe de altă parte, pe un element de suprafaţa dA din aceeaşi secţiune, se dezvoltă tensiunea totală $\overline{p}_\gamma$ (fig. 1.8, *a*) cu componentele σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} (fig. 1.8, *b*).

Forţele $\overline{p}_\nu \mathrm{d}A$ alcătuiesc un sistem de forţe care trebuie să fie echivalent, din punct de vedere mecanic, cu sistemul de forţe al cărui torsor $T_O(\overline{R}, \overline{M}_O)$ are drept componente eforturile secţionale precizate în figura 1.5, *c*. Acest lucru conduce la:

$$\begin{cases} \overline{R} = \int\limits_{(A)} \overline{p}_\gamma \mathrm{d}A \\ \overline{M}_O = \int\limits_{(A)} \overline{r} \times \overline{p}_\gamma \mathrm{d}A \end{cases} \tag{1.28}$$

în care $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al elementului dA faţă de originea sistemului de referinţă ales.

În baza relaţiilor (1.28) şi în conformitate cu figura 1.17 se pot scrie următoarele egalităţi:

$$N = \int_{(A)} \sigma \cdot \mathrm{d}A; \qquad M_x = \int_{(A)} \left(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y\right)\mathrm{d}A;$$

$$T_z = \int_{(A)} \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}A; \qquad M_y = -\int_{(A)} \sigma \cdot z\mathrm{d}A; \tag{1.29}$$

$$T_y = \int_{(A)} \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A; \qquad M_z = \int_{(A)} \sigma \cdot y\mathrm{d}A.$$

Relaţiile (1.29) constituie relaţiile aspectului static la bare şi ele definesc legătura dintre tensiuni şi eforturile secţionale.

Din analiza celor şase egalităţi (1.29) rezultă determinarea tensiunilor într-un punct din interiorul unei bare în funcţie de eforturile secţionale se poate face numai dacă se cunoaşte modul de variaţie al acestora pe secţiune. În acest scop este necesară studierea aspectele geometric şi fizic.

1.8.2. Aspectul geometric

Aspectul geometric al problemelor de rezistenţa materialelor este dat de relaţiile ce pot fi scrise între deplasările u, v, w şi deformaţiile specifice ε şi γ. Aceste relaţii, în marea majoritate a cazurilor, se determină din condiţii geometrice obţinute în urma observării modului de deformare a structurii sub acţiunea solicitărilor.

1.8.3. Aspectul fizic

În practică se constată că deformaţiile corpurilor nu depind numai de forţele care acţionează asupra lor ci şi de materialul din care acestea sunt alcătuite. Rezultă că relaţiile dintre componentele tensorului tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ şi tensorul deformaţiilor specifice proprii $\mathbf{T}_\varepsilon$, care constituie aspectul fizic al problemelor rezistenţei materialelor, se determină pe cale experimentală.

Pentru ca în urma unei astfel de experienţe să se poată desprinde anumite concluzii utile este necesar ca această să îndeplinească următoarele condiţii:

– în toate punctele corpului supus încercării (numit epruvetă) trebuie să se dezvolte aceeaşi stare de tensiuni şi de deformaţii pe întreaga durată a determinărilor;

– experienţa efectuată trebuie să fie cât mai simplă pentru ca rezultatele

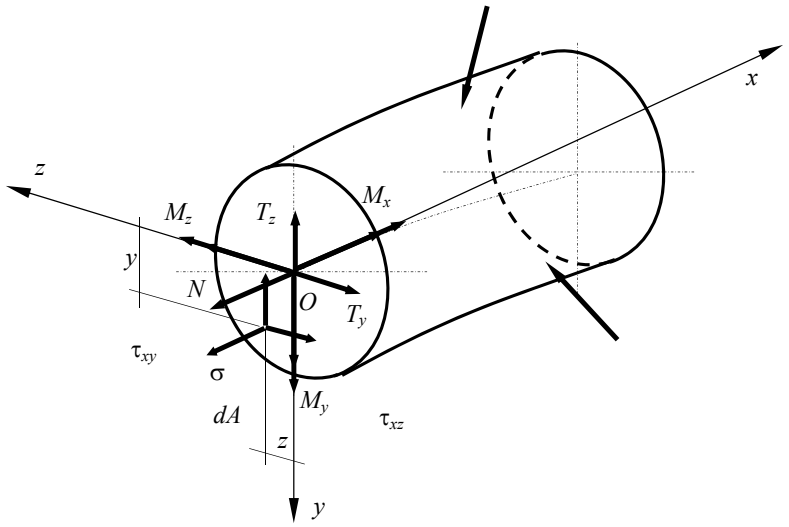


Fig. 1.17.

obținute să poată fi comparabile ori de câte ori s-ar repeta şi oriunde s-ar efectua, în aceleaşi condiții – de mediu şi de încărcare a epruvetei;

– în urma efectuării experienței să rezulte date referitoare la caracteristicile fizico-mecanice ale materialului din care este alcătuită epruveta.

Experiența care îndeplineşte condițiile de mai sus este cea de întindere monoaxială uniformă (fig. 1.18, *a*), în care tensorul tensiunilor are numai componenta $\sigma_x = \sigma$, căreia îi corespunde deformația specifică liniară $\varepsilon_x = \varepsilon$ (fig. 1.18, *b*).

Se poate admite că în zona calibrată dintre reperele *B* şi *C* (fig. 1.18, *a*) efectele prinderii epruvetei în bacurile maşinii de încercare la întindere nu se fac simțite şi, deci, pe orice particulă cu fețele paralele, respectiv normale pe axa epruvetei, se dezvoltă aceeaşi stare monoaxială de tensiuni (fig. 1.18, *b*) $\sigma = F/S_0$, unde *F* este intensitatea forței aplicată la capetele epruvetei, iar S_0 aria secțiunii inițiale a zonei calibrate a acesteia.

Se admite, de asemenea, că alungirea specifică fiecărei particule, în direcția axei barei, este aceeaşi şi egală cu $\varepsilon = \Delta L/L_0$, unde ΔL este alungirea totală a zonei calibrate a epruvetei (de lungime L_0) sub acțiunea forței *F* de la capete.

Plecând de la valoarea $F = 0$ şi urmărind valorile tensiunilor σ şi ale deformației specifice ε, graficul σ – ε pentru această încercare de întindere (fig. 1.18, *c*) poartă numele de *curba caracteristică convențională la tracțiune* (CCCT). La majoritatea materialelor utilizate în realizarea construcțiilor şi

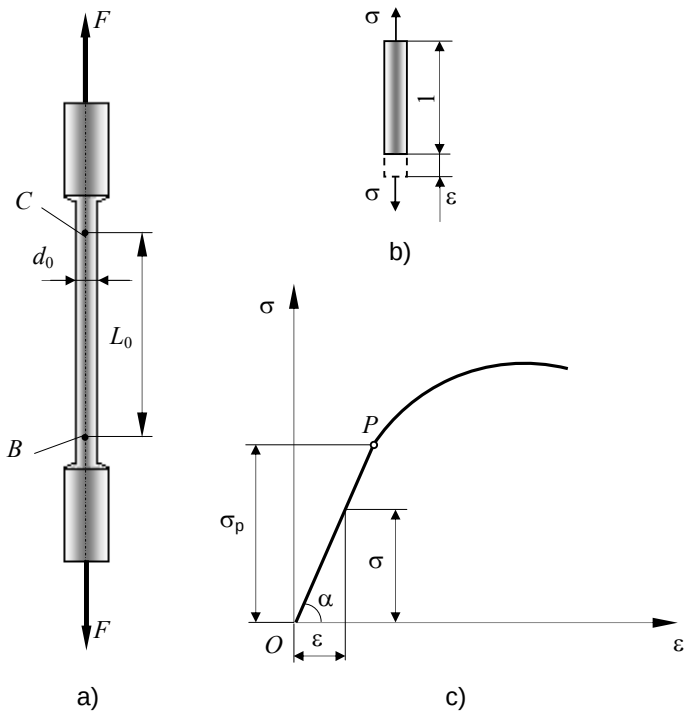


Fig. 1.18

maşinilor, CCCT pe o anumită porțiune (*OP* în fig. 1.18, *c*) este liniară şi se exprimă prin relația:

$$\sigma = (\tan\alpha)\cdot\varepsilon = E\cdot\varepsilon\,. \tag{1.30}$$

Această relație este denumită *legea lui Hooke*, pentru starea liniară de tensiuni şi arată că σ este proporțional cu ε.

Coeficientul de proporționalitate E(= tan α) reprezintă *modulul de elasticitate longitudinal* al materialului din care a fost confecționată epruveta sau modulul lui Joung de ordinul I şi este o caracteristică mecanică a materialului respectiv.

2. DIAGRAME DE EFORTURI PE SRUCTURI PLANE STATIC DETERMINATE ALCĀTUITE DIN BARE

Graficele care reprezintă variaţia eforturilor secţionale, prezentate în subcapitolul 1.3, în fiecare secţiune a unei bare sau al unui sistem de bare, sunt denumite *diagrame de eforturi*.

Dacă este posibilă determinarea acestora din ecuaţii de echilibru static atunci sistemul este static determinat. Un sistem este static determinat atunci când numărul necunoscutelor este egal cu numărul ecuaţiilor de echilibru care pot fi scrise. Dacă solidul rigid este acţionat de un sistem de forţe coplanare atunci pentru ca el să reprezinte un sistem static determinat sunt necesare 3 legături simple pentru a deveni corp cu legături complete. Legătura simplă este legătura care răpeşte corpului un singur grad de libertate corespunzător deplasării pe direcţia legăturii (fig. 2.1, *a*). Tipurile de legături pe care un sistem plan le poate prezenta au fost studiate în cadrul Mecanicii teoretice şi ele sunt:

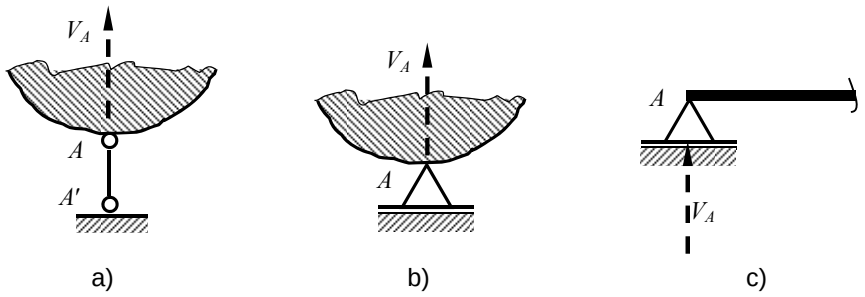


Fig. 2.1.

– *reazemul simplu* care împiedică deplasarea după o singură direcţie (în fig. 2.1, *a* punctul *A* care aparţine solidului rigid nu se poate deplasa pe direcţia *A–A′*); el se reprezintă ca în figura 2.1, *b* sau se schematizează ca în figura 2.1, *c*; din punct de vedere mecanic, reazemul simplu poate fi înlocuit cu o singură forţă de legătură (de exemplu V_A), dirijată după direcţia *AA′*, a cărei mărime este

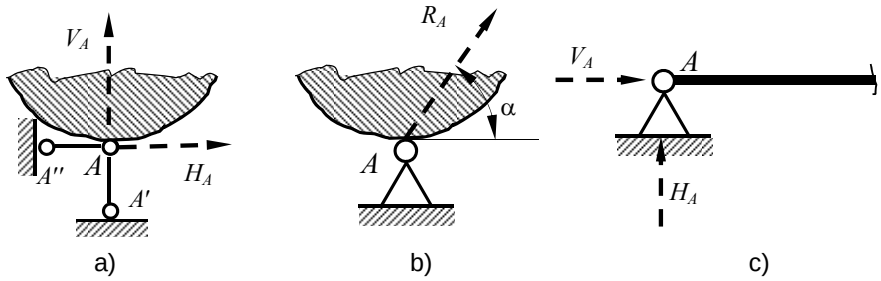


Fig. 2.2.

necunoscută (punctul de aplicaţie şi direcţia fiind cunoscute, sensul iniţial este ales arbitrar, cel real rezultând din condiţiile de echilibru static).

– *articulaţia cilindrică* sau *articulaţia plană* (se mai numeşte şi reazem dublu) împiedică deplasarea după două direcţii (în figura 2.2, *a* punctul *A* al solidului rigid nu se poate deplasa după direcţiile $A–A'$ şi $A–A''$); acest tip de legătură se reprezintă ca în figura 2.2, *a*, sau se schematizează ca în figurile 2.2, *b*, *c*; o astfel de legătură poate fi înlocuită cu o forţă cu punctul de aplicaţie în *A*, care are ca necunoscute mărimea R_A şi direcţia prin unghiul α (fig. 2.2, *b*); aceste două necunoscute pot fi înlocuite de alte două necunoscute, de aceeaşi natură, şi anume de două componente ale lui R_A, perpendiculare între ele: H_A şi V_A (fig. 2.1, *c*).

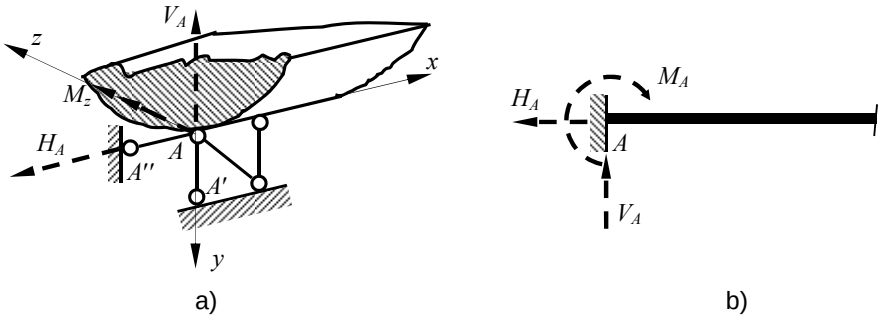


Fig. 2.3.

– *încastrarea plană* care împiedică deplasarea după două direcţii şi rotirile după o direcţie normală la planul format de direcţiile deplasărilor împiedicate (în figura 2.3, *a* punctul *A* nu se poate deplasa după direcţiile $A–A'$ şi $A–A''$, iar solidul rigid nu se poate roti în jurul axei $A–z$); Încastrarea plană poate fi înlocuită

cu două forțe de legătură H_A şi V_A, perpendiculare între ele şi care au mărimile necunoscute şi un moment M_A dirijat după o direcție normală pe planul definit de cele două forțe şi care are, de asemenea, mărimea necunoscută (fig.2.3, *b*).

2.1. DETERMINAREA EFORTURILOR SECŢIONALE ÎNTR-O SECŢIUNE OARECARE A BAREI

Dacă o bară plană este acționată de un sistem de forțe coplanare cuprinse în planul barei, atunci şi legăturile sunt situate în acelaşi plan cu forțele, aşa cum se poate observa în figura 2.4, *a* unde bara a fost schematizată prin axa sa. De obicei se consideră că sistemul este situat în planul *xOy*. În această situație, într-o secțiune curentă *i*, pe fața din dreapta acesteia – fața în care intră axa *Ox*, figura 2.4, *b* – apar următoarele eforturi secționale: N, T_z şi M_z care, pentru simplificare, se vor nota fără indicele *z* (fig. 2.4, *c*).

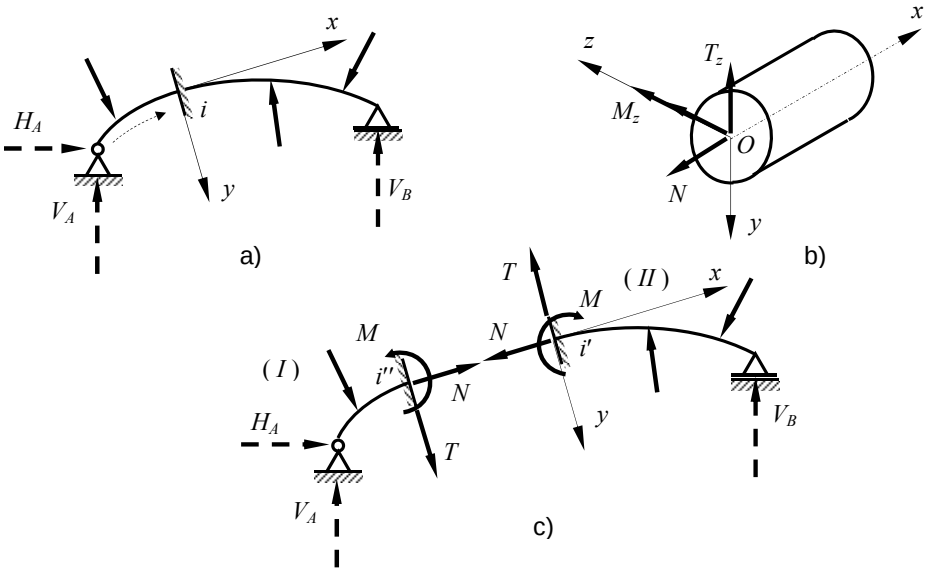


Fig. 2.4.

Prin secționarea barei în punctul *i* se obțin barele *I* şi *II*, iar eforturile secționale din secțiunea efectuată se introduc ca în figura 2.4, *c*. În baza reciprocității acțiunii şi reacțiunii, eforturile de pe fața din dreapta secțiunii (fața *i'* ce aparține barei *II*, fig. 2.4, *c*), marcată de sensul pozitiv al axei *x*, care coincide

cu sensul de parcurgere al axei barei, sunt egale şi de sensuri contrare, faţă de cele de pe faţa din stânga secţiunii (faţa *i''* ce aparţine barei *I*, fig. 2.4, *c*).

Sensurile pozitive ale eforturilor secţionale, atunci când ne referim la faţa din dreapta secţiunii sunt, aşa cum s-a precizat în subcapitolul 1.3: *N* şi *T* – pozitive când sunt în sens invers axelor cu care sunt paralele, iar *M* este pozitiv când are vectorul dirijat în sensul axei *Oz* (fig. 2.4, *b*).

Dacă bara din figura 2.4, *a* este în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare efectiv aplicate şi de legătură atunci, după secţionare, barele *I* şi *II* sunt în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare efectiv aplicate şi de legătură şi a eforturilor secţionale introduse. Din ecuaţiile de echilibru care se pot scrie pentru fiecare din cele două bare obţinute în urma secţionării, se pot determina valorile eforturilor secţionale. Astfel, pentru bara *I* se poate scrie:

$$\begin{cases} N + \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_x = 0 \\ T + \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_y = 0 \\ -M + \sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,I} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} N = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_x = \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_{-x} \\ T = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_y = \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_{-y} \\ M = \sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,I} \end{cases}; \qquad (2.1)$$

pentru bara *II*:

$$\begin{cases} -N + \sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_x = 0 \\ -T + \sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_y = 0 \\ M + \sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,II} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} N = \sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_x = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_{-x} \\ T = \sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_y = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_{-y} \\ M = -\sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,I} \end{cases}. \qquad (2.2)$$

Rezultă:

$$\begin{cases} N = \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_x = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_{-x} \\ T = \sum (pr\overline{F}_i^{\,I})_y = -\sum (pr\overline{F}_i^{\,II})_{-y} \\ M = \sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,I} = -\sum \mathsf{M}_O \overline{F}_i^{\,II} \end{cases} \qquad (2.3)$$

Relaţiile (2.3) se citesc astfel:

– forţa axială *N* este egală cu suma proiecţiilor pe axa –*x*, a tuturor forţelor de pe bara *I* sau a celor de pe bara *II*, luată cu semn schimbat;

– forţa tăietoare *T* este egală cu suma proiecţiilor pe axa –*y*, a tuturor forţelor de pe bara *I* sau a celor de pe bara *II*, luată cu semn schimbat;

– momentul încovoietor *M* este egal cu suma momentelor forţelor de pe bara *I*,

calculate faţă de centrul de greutate *O* al secţiunii, sau a celor de pe bara *II*, luată cu semn schimbat.

Relaţiile (2.3) exprimă legătura dintre eforturile secţionale dintr-o secţiune oarecare a unei bare şi forţele exterioare efectiv aplicate şi de legătură ce solicită bara. Ele pun în evidenţă faptul că eforturile secţionale sunt funcţii discontinui de poziţia *x* a secţiunii, punctele de discontinuitate fiind: capetele barei, punctele de aplicaţie ale forţelor sau cuplurilor exterioare concentrate pe axa barei şi punctele unde încep şi se termină forţele distribuite pe axa barei. În intervalele dintre aceste puncte (denumite limite sau capete de interval), funcţiile de variaţie a eforturilor secţionale sunt funcţii continui.

Rezultă că diagramele de eforturi sunt reprezentările grafice, pe fiecare interval în parte, a acestor funcţii.

2.2. RELAŢIILE DIFERENŢIALE ÎNTRE EFORTURILE SECŢIONALE ŞI SARCINI

Se detaşează din bara aflată în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare efectiv aplicate şi de legătură, la distanţa *x* de origine, un element de bară de lungime d*x*, prin două secţiuni drepte (fig. 2.5, *a*). Pe acest element de bară va acţiona forţa exterioară uniform distribuită $\overline{q} = q_x\overline{i} + q_y\overline{j}$, iar în secţiunile de la capetele lui se introduc eforturile secţionale: *N*, *T*, *M* în secţiunea situata la distanţa *x* de origine

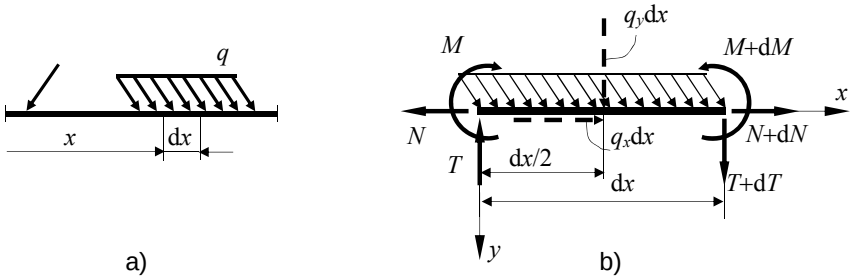


Fig. 2.5.

şi $N + \mathrm{d}N$, $T + \mathrm{d}T$, $M + \mathrm{d}M$ în secţiunea situată la distanţa $x + \mathrm{d}x$, toate introduse cu semn pozitiv (fig. 2.5, *b*).

Ecuaţiile de echilibru scrise pentru elementul de bară de lungime d*x* au forma:

$$(N + \mathrm{d}N) - N + q_x \mathrm{d}x = 0$$

$$(T + \mathrm{d}T) - T + q_y \mathrm{d}x = 0 \tag{2.4}$$

$$M + \mathrm{d}M - M - T \cdot \mathrm{d}x - q_x \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

Dacă în ultima ecuație (2.4) termenul $q_x \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2}$ se neglijează, el fiind considerat o cantitate elementară de ordin superior, atunci rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{dx}} = -q_x\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dy}} = -q_y\,; \tag{2.5}$$

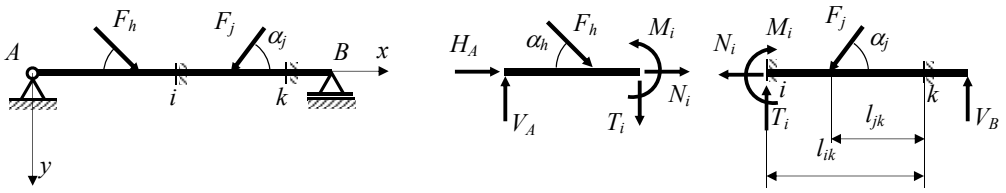
$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T$$

Deoarece, după cum s-a precizat, diagramele de eforturi sunt reprezentările grafice ale funcțiilor $N = N(x)$, $T = T(x)$, $M = M(x)$ pe diferitele intervale ale barei, relațiile (2.5) reprezintă pantele diagramelor respective în secțiunea x. Cu ajutorul relațiilor diferențiale (2.5) se pot determina: alura graficului respectiv pe un interval oarecare, valorile maxime sau minime ale efortului secțional pe intervalul respectiv, precum şi semnul unghiului dintre tangentele la cele două ramuri ale unei diagrame, din stânga sau din dreapta unui punct de discontinuitate.

2.3. RELAŢII DE RECURENŢĂ PENTRU EFORTURILE SECŢIONALE LA BARE DREPTE

Pe bara din figura 2.6, *a* s-a delimitat intervalul *i–k*. Dacă se secționează bara în *i,* în această secțiune apar eforturile secționale reprezentate în figura 2.6, *b* care, pentru fața din dreapta secțiunii, reprezintă torsorul tuturor forțelor, efectiv aplicate şi de legătură, care acționează asupra barei din stânga secțiunii. Din punct de vedere mecanic, aceste eforturi secționale reprezintă efectul părții înlăturate asupra părții rămase.

Eforturile de pe fața din dreapta secțiunii *k* se pot determina în funcție de eforturile de pe fața din dreapta secțiunii *i* şi de forțele exterioare, efectiv aplicate şi de legătură (fig. 2.6, *b*), cu următoarele relații de recurență:



a) b)

Fig. 2.6.

$$N_k = N_i + \sum_i^k F_j \cos\alpha_j \,;$$

$$T_k = T_i - \sum_i^k F_j \sin\alpha_j \,; \tag{2.6}$$

$$M_k = M_i + T_i l_{ik} - \sum_j^k (F_j \sin\alpha_j) l_{jk} \,.$$

Dacă pe intervalul *i-k* acționează o forță distribuită (fig.2.7) eforturile într-o secțiune curentă *x* se determină astfel:

$$T_x = T_i - qx \,; \tag{2.7}$$

$$M_x = M_i + T_i x - \frac{qx^2}{2} \,. \tag{2.8}$$

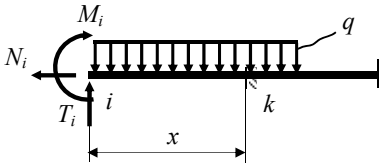


Fig. 2.7.

Dacă forța tăietoare se anulează pe intervalul *i-k*, din condiția $T_x = 0$ se obține:

$$x_0 = \frac{T_i}{q} \,, \tag{2.9}$$

care identifică secțiunea în care momentul încovoietor este maxim. Înlocuind valoarea lui x_0 în expresia lui M_x din (2.8) se obține:

$$M_{\max} = M_i + \frac{T_i^2}{2q} \,, \tag{2.10}$$

relație care permite determinarea momentului încovoietor maxim pe intervalul pe care este distribuită forța distribuită *q*.

2.4. DIAGRAME DE EFORTURI LA CONSOLE

Prin consolă se înțelege acea porțiune a unei bare care are un capăt liber. De exemplu în figura 2.8 , *a* este reprezentată o consolă cu un capăt liber *A* şi un capăt încastrat *D*. În figura 2.9, *a* porțiunea *D–E* a barei poartă de asemenea numele de consolă.

Pentru determinarea diagramelor de eforturi pentru consola din figura 2.8, *a* se alege sistemul de axe de coordonate cu originea în *A*, punctul cel mai din stânga al barei. Axa *x* coincide cu axa barei şi indică sensul de parcurgere al acesteia, de la stânga la dreapta. Alegând sensul axei *y* în jos rezultă că axa *z* este perpendiculară pe planul forțelor care acționează asupra barei şi are sensul astfel încât sistemul axelor de referință să fie un sistem drept.

Deoarece bara are un capăt liber nu este neapărat necesar să se calculeze forțele de legătură V_D şi H_D precum şi momentul M_D din încastrarea *D*, calculul eforturilor secționale *N*, *T* şi *M* putându-se face reducând forțele din urma secțiunii situată la cota *x* (fig. 2.8, *a*).

Capetele de interval fiind deja notate cu *A*, *B*, *C*, *D* se trece la calculul eforturilor secționale ținând seama de convențiile făcute în subcapitolul 1.3 şi de relațiile de recurență prezentate în subcapitolul 2.3. Fiindcă bara se parcurge de la stânga la dreapta, în sensul axei *x*, eforturile secționale de pe fața din dreapta secțiunii se determină prin reducerea tuturor forțelor din urmă, adică a tuturor forțelor care se află pe porțiunea de bară parcursă.

Forța axială *N*, calculată pe fața din dreapta secțiunii în care se determină, are următoarele valori la capete de interval:

$N_{A_1} = 3qa$, deoarece forța $3qa$ are sensul invers axei *x*;

$N_{B_1} = 3qa$, deoarece între secțiunile A_1 şi B_1 nu există nicio forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa *x*;

$N_{B_2} = 3qa - 5qa = -2qa$, deoarece forța $5qa$ are sensul axei *x*;

$N_{C_1} = -2qa$, deoarece între secțiunile B_2 şi C_1 nu există nici-o forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa *x*;

$N_{C_2} = -2qa + 2qa = 0$, deoarece forța $2qa$ are sensul invers axei *x*;

$N_{D_1} = 0$ deoarece între secțiunile C_2 şi D_1 nu există nici-o forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa *x*.

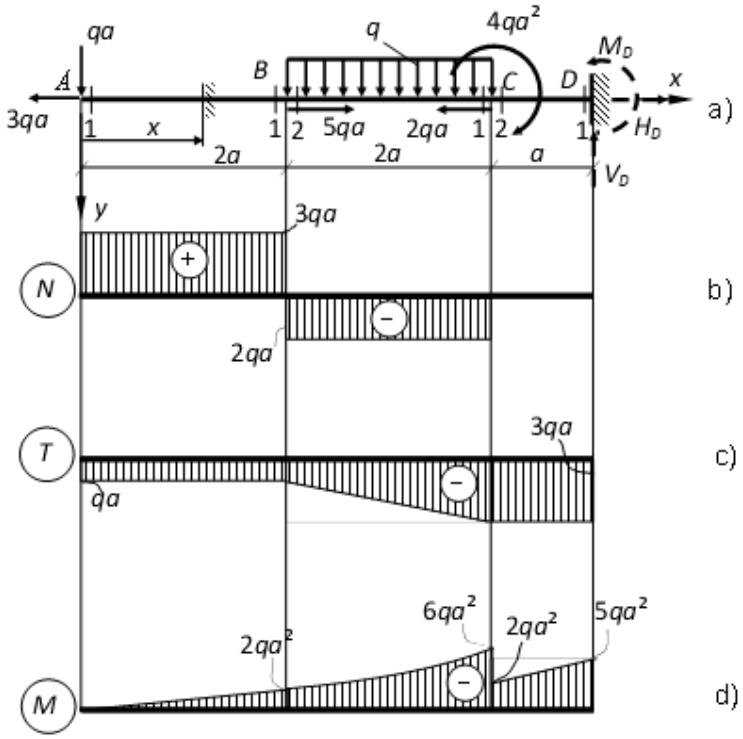


Fig. 2.8.

Forța tăietoare T, calculată pe fața din dreapta secțiunii în care se determină, are următoarele valori la capete de interval:

$T_{A_1} = -qa$, deoarece forța qa are sensul axei y;

$T_{B_1} = -qa$, deoarece între secțiunile A_1 şi B_1 nu există nicio forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa y;

$T_{B_2} = -qa$, deoarece secțiunea B_2 este situată foarte aproape de B fapt ce conduce la neglijarea sarcinii echivalente corespunzătoare forței uniform distribuite q pe intervalul B–B_1;

$T_{C_1} = -qa - 2qa = -3qa$, deoarece sarcina echivalentă forței uniform distribuite q pe intervalul B–C, $2qa$ are sensul axei y;

$T_{C_2} = -3qa$, deoarece pe intervalul C_1–C_2 nu există nici-o forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa y, iar secțiunea C_1 este situată foarte aproape de C fapt ce conduce la neglijarea sarcinii echivalente corespunzătoare forței uniform distribuite q pe intervalul C_1–C;

$T_{D_1} = -3qa$, deoarece pe intervalul C_2–D_1 nu există nici-o forță aplicată barei care să se proiecteze pe axa y.

Momentul încovoietor M, calculat pe fața din dreapta secțiunii în care se determină, are următoarele valori la capete de interval:

$M_{A_1} = 0$, deoarece secțiunea A_1 este situată foarte aproape de A astfel încât brațul forței qa este suficient de mic pentru a neglija momentul dat de această forță;

$M_{B_1} = -qa \cdot 2a = -2qa^2$, deoarece roteşte negativ (are vectorul în sensul invers axei z, axă care împreună cu axele x şi y formează un triedru drept – axa z în cazul studiat are sensul de la cititor la foaiea de hârtie);

$M_{B_2} = -2qa^2$, deoarece secțiunea B_2 este situată foarte aproape de B fapt ce conduce la neglijarea momentului dat de sarcina echivalentă corespunzătoare forței uniform distribuite q pe intervalul B–B_1;

$M_{C_1} = -qa \cdot 4a - 2qa \cdot a = -6qa^2$, deoarece sarcina echivalentă forței uniform distribuite q este aplicată la jumătatea intervalului B–C, iar momentul dat de ea are vectorul în sensul invers axei z;

$M_{C_2} = -6qa^2 + 4qa^2 = -2qa^2$, deoarece cuplul concentrat $4qa^2$ roteşte pozitiv;

$M_{D_1} = -qa \cdot 5a - 2qa \cdot 2a + 4qa^2 = -5qa^2$.

Pentru trasarea diagramelor de eforturi se vor lua în considerare dependența dintre eforturi şi sarcini precizate de relațiile (2.5).

Astfel pentru forțe axială N pe intervalul A_1–B_1, $q_x = 0$ şi deci, N este constant având valoarea $3qa$ (fig. 2.8, *b*). Analog pentru intervalele B_2–C_1 şi C_2–D_1, pe care forța axială este constantă având valorile – $2qa$, respectiv zero.

Forța tăietoare rămâne constantă pe intervalele A_1–B_1, respectiv C_2–D_1, deoarece pe aceste intervale $q_y = 0$ şi are o variație liniară pe intervalul B_2–C_1, interval pe care $q_y = q =$ const. (fig 2.8, *c*).

Deoarece pe intervalul A_1–B_1 forța tăietoare este constantă $T = qa$, rezultă că $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = qa =$ const. şi deci momentul încovoietor are o variație liniară (fig. 2.8, *d*). Pe intervalul B_2–C_1 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = q =$ const. ceea ce conduce la $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = q$, adică momentul încovoietor are o variație parabolică. Tangenta în B la parabola respectivă face cu axa x acelaşi unghi (are aceeaşi pantă) cu dreapta ce reprezintă variația momentului încovoietor pe intervalul A_1–B_1 deoarece $T_{B_1} = T_{B_2}$. Deoarece a doua derivată a momentului încovoietor este pozitivă acesta admite un minim. Pentru că forța tăietoare nu se anulează pe intervalul B_2–C_1, valoarea minimă a

momentului încovoietor M nu se afla între secţiunile B_2 şi C_1. Pe intervalul C_2–D_1 momentul încovoietor are o variaţie liniară deoarece, pe acest interval forţa tăietoare este constantă $T = -3qa$. Dreapta care reprezintă variaţia momentului încovoietor pe intervalul C_2–D_1 are aceeaşi pantă ca tangenta la parabolă în C_1 la valoarea $-6qa^2$.

Observaţii. Diagrama N prezintă un salt în dreptul unei forţe concentrate în axa barei, salt de mărimea şi în sensul acesteia, aşa cum rezultă din figura 2.8, *b* în secţiunea B a barei.

În secţiunea C a barei momentul încovoietor M are un salt în sensul şi de mărimea cuplului concentrat $4qa^2$.

Forţele de legătură din încastrarea D se pot determina pe baza diagramelor de eforturi. Astfel, reducând forţele care acţionează pe bucata de bară aflată înaintea secţiunii D_1, eforturile secţionale calculate pe faţa din dreapta secţiunii, conform cu relaţiile (2.2), sunt:

$$N_{D_1} = -(-H_D) = 0 \Rightarrow H_D = 0;$$

$$T_{D_1} = -(V_D) = -3qa \Rightarrow V_D = -3qa;$$

$$M_{D_1} = -(-M_D) = -5qa^2 \Rightarrow M_D = -5qa^2.$$

2.5. DIAGRAME DE EFORTURI LA GRINZI SIMPLU REZEMATE

Prin grindă simplu rezemată se înţelege o bară dreaptă care prezintă ca legături un reazem simplu şi o articulaţie plană, aşa cum se poate vedea în figura 2.9, *a*.

Originea sistemului de referinţă se alege în punctul A, situat la extremitatea stângă a barei, iar axa x să coincidă cu axa barei. În acest fel sensul de parcurgere al barei este de la stânga la dreapta. Pentru a putea trasa diagramele de eforturi secţionale este necesar ca mai întâi să se determine cel puţin forţele de legătură exterioare fie din articulaţia A, fie din reazemul simplu D. Se poate observa că forţa orizontală H_A se determină scriind o ecuaţie de proiecţie a tuturor forţelor efectiv aplicate şi de legătură pe direcţia axei barei:

$$H_A - 3qa + qa = 0 \Rightarrow H_A = 2qa.$$

Deoarece sistemul de forţe care acţionează asupra barei este un sistem de forţe coplanar se mai pot scrie încă două ecuaţii de echilibru. Se vor scrie ecuaţii de moment în raport cu punctele A şi D fiindcă, în acest fel, cele două necunoscute V_A şi V_D nu apar simultan în aceeaşi ecuaţie. Astfel din ecuaţia de moment în raport cu punctul A:

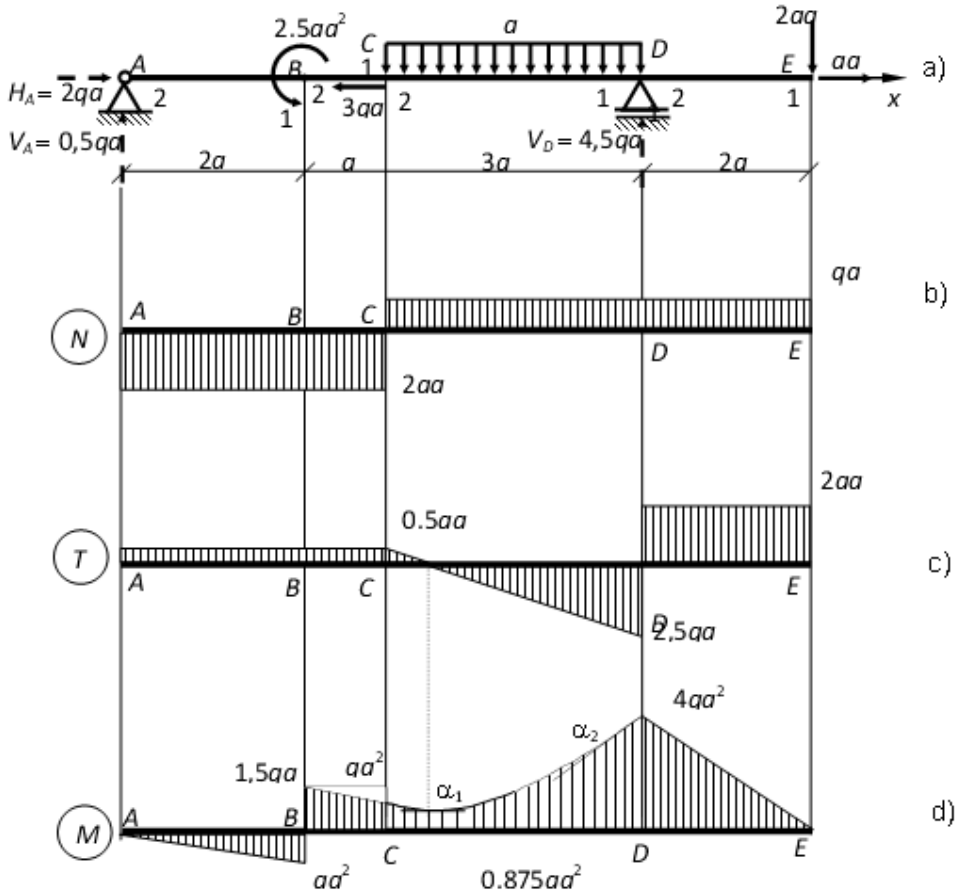


Fig. 2.9.

$$-2{,}5qa^2 + 3qa\cdot 4{,}5a - V_D\cdot 6a + 2qa\cdot 8a = 0,$$

rezultă forța de legătură $V_D = 4{,}5qa$, iar din ecuația de moment în raport cu punctul D:

$$V_A\cdot 6a - 2{,}5qa^2 - 3qa\cdot 1{,}5a + 2qa\cdot 2a = 0,$$

rezultă forța de legătură $V_A = 0{,}5qa$. Verificarea acestor calcule se poate face scriind o ecuație de proiecție pe o direcție perpendiculară pe axa barei:

$$V_A - 3qa + V_D - 2qa = 0,$$

care după înlocuire

$$0{,}5qa - 3qa + 4{,}5qa - 2qa = 0$$

confirmă corectitudinea rezultatelor.

Calculul eforturilor secționale N, T şi M la capete de interval se poate face, de această dată, reducând forțele fie din urma secțiunii în raport cu care se determină eforturile secționale, fie din înaintea acesteia, după cum calculul respectiv este mai mult sau mai puțin complicat.

Astfel forța axială N, considerând convențiile de semn precizate în subcapitolul 1.3, are valorile:

$$N_{A_2} = -H_A = -2qa;$$

$$N_{B_1} = -H_A = -2qa;$$

$$N_{B_2} = -H_A = -2qa;$$

$$N_{C_1} = -H_A = -2qa;$$

$$N_{C_2} = -H_A + 3qa = qa;$$

$$N_{D_1} = qa;$$

$$N_{D_2} = qa;$$

$$N_{E_1} = qa.$$

Forța tăietoare T în corelație cu convenția de semne făcută în subcapitolul 1.3 are valorile:

$$T_{A_2} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{B_1} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{A_2} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{B_2} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{C_1} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{C_2} = V_A = 0{,}5qa;$$

$$T_{D_1} = V_A - 3qa = -2{,}5qa;$$

$T_{D_2} = 2qa$, (au fost reduse forțele din dreapta secțiunii);

$$T_{E_1} = 2qa.$$

Analog, momentul de încovoiere M are valorile:

$M_{A_2} = 0;$

$M_{B_1} = V_A \cdot 2a = 0{,}5qa \cdot 2a = qa^2;$

$M_{B_2} = M_{B_1} - 2{,}5qa^2 = -1{,}5qa^2;$

$M_{C_1} = V_A \cdot 2a - 2{,}5qa^2 = qa^2;$

$M_{C_2} = V_A \cdot 2a - 2{,}5qa^2 = qa^2;$

$M_{D_1} = -(2qa \cdot 2a) = -4qa^2$, (au fost reduse forțele din dreapta secțiunii);

$M_{D_2} = -(2qa \cdot 2a) = -4qa^2;$

$M_{E_1} = 0.$

Cu ajutorul relațiilor diferențiale dintre eforturile secționale şi încărcări (2.5) se poate trasa variația eforturilor secționale pe fiecare interval al barei.

Astfel, deoarece pe intervalele *A–B* şi *B–C* nu există sarcină distribuită în axa barei, adică $q_x = 0$, forța axială *N* rămâne constantă cu valoarea $-2qa$; de asemenea pe intervalele *C–D* şi *D–E* pe care $N = qa$ (fig. 2.9, *b*).

Forța tăietoare *T* este constantă şi are valoarea $0{,}5qa$ pe intervalul *A–B* respectiv *B–C* deoarece pe aceste intervale $q_y = 0$ (fig. 2.9, *c*). Pe intervalul *C–D*, deoarece $q_y = q = \text{const.} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$, forța tăietoare are o variație liniară de la valoarea $0{,}5qa$ la $-2{,}5qa$. De asemenea, *T* este constantă pe intervalul *D–E* şi are valoarea $2qa$ pentru că pe acest interval $q_y = 0 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ (fig. 2.9, *c*).

Momentul încovoietor *M* are o variație liniară pe intervalul *A–B* (fig. 2.9, *d*) deoarece $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T = 0{,}5qa = \text{const.}$ La fel şi pe intervalul *B–C*, cele două drepte, care redau variația momentului încovoietor *M* având aceeaşi pantă, deoarece forța tăietoare are aceeaşi valoare, $T = 0{,}5qa$ pe cele două intervale. Pe intervalul *C–D* momentul încovoietor *M* are o variație parabolică deoarece $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -q = \text{const.}$ Parabola respectivă admite o valoare maximă deoarece, pe acest interval, forța tăietoare se anulează. Această valoare se determină cu relația (2.10):

$$M_{\max} = -qa^2 + \frac{(0{,}5qa)^2}{2q} = -4qa^2 + \frac{(2{,}5qa)^2}{2q} = -0{,}875qa^2.$$

Parabola care redă variația momentului încovoietor pe intervalul *C–D* admite

în C o tangentă care are aceeaşi pantă cu dreapta ce redă variaţia momentului încovoietor pe intervalul B–C deoarece $T_{B_1} = T_{B_2}$, adică forţa tăietoare nu are salt în B. În secţiunea în care momentul încovoietor are valoarea maximă $M_{\max}$ şi în care $T = 0$ tangenta la parabolă este paralelă cu axa barei. La dreapta intervalului C–D tangenta la parabolă se obţine rotind antiorar o dreaptă paralelă cu axa barei ce trece prin valoarea $-4qa^2$ cu un unghi a cărui tangentă $\mathrm{tg}\alpha_2 = -2{,}5qa$, iar la stânga intervalului tangenta la parabolă se obţine rotind orar o dreaptă paralelă cu axa barei care trece prin valoarea $-qa^2$ cu un unghi a cărui tangentă $\mathrm{tg}\alpha_1 = 0{,}5qa$. Pe intervalul D–E variaţia momentului încovoietor este liniară deoarece pe acest interval forţa tăietoare $T = 2qa = \text{const}$.

Analizând diagramele se poate constata că în dreptul unei forţe concentrate, perpendiculară pe axa barei, de exemplu forţa de legătură V_D, variaţia forţei tăietoare redată în diagrama T (fig. 2.9, *c*) are un salt în sensul şi de mărimea forţei concentrate, iar variaţia momentului încovoietor, redată în diagrama M (fig. 2.9, *d*) are o schimbare bruscă de pantă.

Variaţia momentului încovoietor M are un salt în secţiunea în care este aplicat un cuplu de forţe (vezi punctul B de pe bară, fig. 2.9, *a*). Saltul respectiv este de mărimea şi în sensul cuplului de forţe.

2.6. DIAGRAME DE EFORTURI LA CADRE

În cadrul sistemelor de bare intersecţiile dintre acestea poartă numele de *noduri*. Nodurile pot fi *rigide* (nodurile C şi E din fig. 2.10, *a*), caz în care barele adiacente lui nu au rotiri relative, sau *articulaţii* (nodul D din fig. 2.10, *a*) atunci când rotirile relative dintre toate barele nodului sunt permise.

Prin cadru se înţelege un sistem de bare care prezintă cel puţin un nod rigid (fig. 2.10, *a*).

Pentru a putea trasa diagramele pe cadrul din figura 2.10, *a* este necesar ca mai întâi să se determine forţele de legătură exterioare, adică forţele din articulaţiile A, respectiv F. Deoarece cele două articulaţii exterioare sunt la acelaşi nivel, forţele de legătură V_A şi V_B se determină scriind ecuaţii de moment în F, respectiv A, pe întreg sistemul de bare (forţele de legătură H_A şi H_F nu dau moment în raport cu punctele A şi F).

$$V_A \cdot 5a - qa \cdot 2a - 2qa \cdot 6a + 3qa^2 - 3qa \cdot 1{,}5a = 0 \Rightarrow V_A = 3{,}1qa;$$

$$-qa \cdot 2a - 2qa \cdot a + 3qa^2 + 3qa \cdot 3{,}5a - V_F \cdot 5a = 0 \Rightarrow V_F = 1{,}9qa.$$

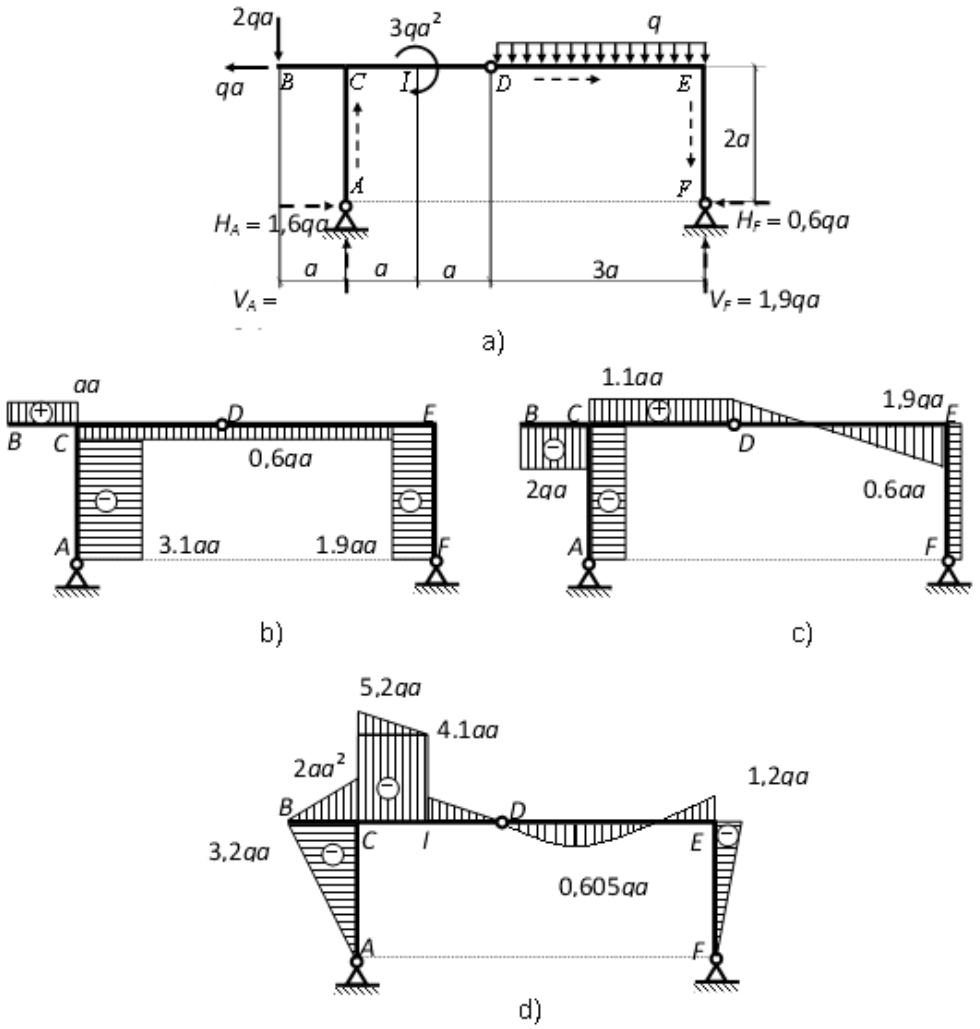


Fig. 2.10

Verificarea acestor calcule se face scriind o ecuație de proiecție pe verticală pe întreg sistemul:

$$V_A - 2qa - 3qa + V_F = 0 \Leftrightarrow 3{,}1qa - 5qa + 1{,}9qa = 0.$$

Determinarea forțelor de legătură H_A şi H_F se face, aplicând metoda izolării corpurilor, prin scrierea de ecuații de moment în raport cu D, pe corpul $A–D$ pentru H_A, respectiv pe corpul $D–F$ pentru H_F.

$$3{,}1qa\cdot 2a - H_A\cdot 2a - 2qa\cdot 3a + 3qa^2 = 0 \Rightarrow H_A = 1{,}6qa;$$

$$3qa\cdot 1{,}5a + H_F\cdot 2a - 1{,}9qa\cdot 3a = 0 \Rightarrow H_F = 0{,}6qa.$$

Ecuația de proiecție pe orizontală, pe întreg sistemul:

$$-qa + H_A - H_F = 0 \Leftrightarrow -qa + 1{,}6qa - 0{,}6qa = 0$$

confirmă exactitatea calculelor.

În vederea trasării diagramelor de eforturi se alege un sens de parcurgere pentru fiecare bară a cadrului. În figura 2.10, *a* sensul de parcurgere a fost marcat prin săgețile punctate situate sub axele barelor.

La fel ca în cazul barelor drepte, trebuie ca mai întâi să se determine valoarea eforturilor secționale la capetele de interval. Acest lucru se face prin efectuarea unei secțiuni, în punctul în care se dorește să se determine efortul secțional, și prin reducerea tuturor forțelor fie din urma acesteia fie din fața acesteia prin raportare la sensul de parcurgere ales.

După determinarea eforturilor secționale diagramele de eforturi se trasează, pe fiecare interval, în conformitate cu relațiile (2.5). În funcție de sensul de parcurgere al barei ales valorile pozitive se vor trasa deasupra axei barei, iar cele negative sub axa acesteia pentru diagramele *N* și *T*, iar pentru diagrama *M* valorile negative deasupra axei barei, cele pozitive sub axa acesteia (v. fig. 2.10, *b*, *c*, *d*).

Toate observațiile făcute anterior cu privire la diagramele de eforturi secționale la console și bare drepte rămân valabile și în acest caz.

3. SOLICITĂRI SIMPLE ALE BARELOR DREPTE

3.1. INTINDEREA SAU COMPRESIUNEA SIMPLĂ

O bară sau numai o porțiune din ea este solicitată la întindere sau compresiune simplă atunci când numai efortul axial N este diferit de zero.

În cadrul acestui capitol, prin compresiune simplă se înțelege solicitarea la compresiune a barelor la care pericolul pierderii stabilității echilibrului în starea deformată este mic sau inexistent. Este cazul barelor foarte groase.

3.1.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Deoarece în planul secțiunii drepte a barei torsorul eforturilor secționale este compus numai din forța axială N, relațiile de echivalență ale aspectului static (1.29) sunt (fig. 3.1):

$$\begin{aligned} N &= \int_{(A)} \sigma_x \mathrm{d}A \neq 0; & M_x &= \int_{(A)} (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y)\mathrm{d}A = 0; \\ T_z &= \int_{(A)} \tau_{xy} \mathrm{d}A = 0; & M_y &= -\int_{(A)} \sigma_x z \mathrm{d}A = 0; \\ T_y &= \int_{(A)} \tau_{xz} \mathrm{d}A = 0; & M_z &= \int_{(A)} \sigma_x y \mathrm{d}A = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pentru determinarea tensiunilor în funcție de eforturile secționale este necesară cunoaşterea modului de variație a acestora pe secțiunea barei fapt ce implică folosirea aspectelor geometric şi fizic.

Pentru a stabili dependența dintre deplasările diferitelor particule ale barei şi deformațiile acestora – care defineşte aspectul geometric – se trasează, pe suprafața exterioară a barei nedeformate, două curbe directoare, la o distanță foarte mică una față de cealaltă, dx (fig. 3.2, *a*). Aceste curbe pot fi imaginate ca

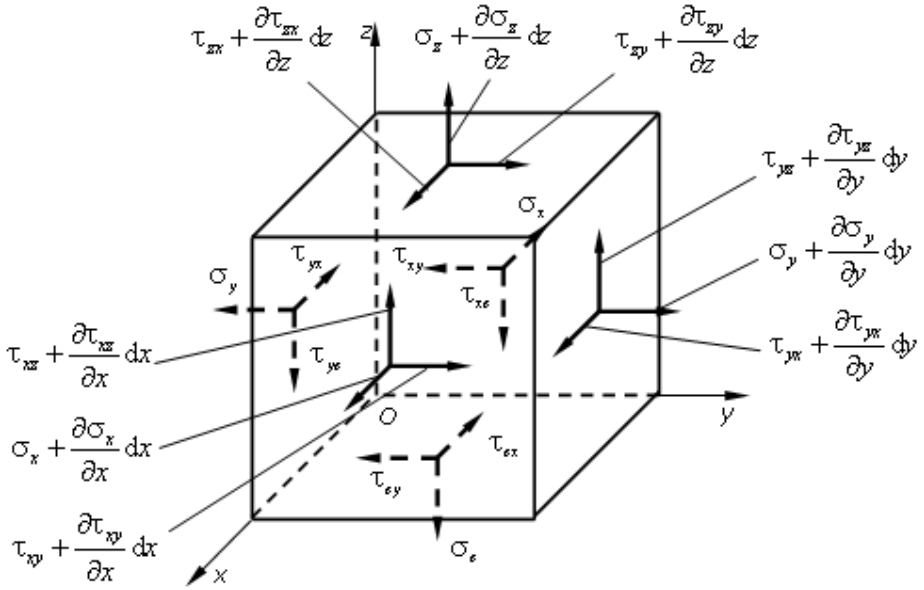


Fig. 4.1.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

În mod analog, din ecuații de proiecție pe *Py* şi *Pz* se obțin alte două ecuații, care împreună cu prima formează următorul sistem de ecuații diferențiale de echilibru:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

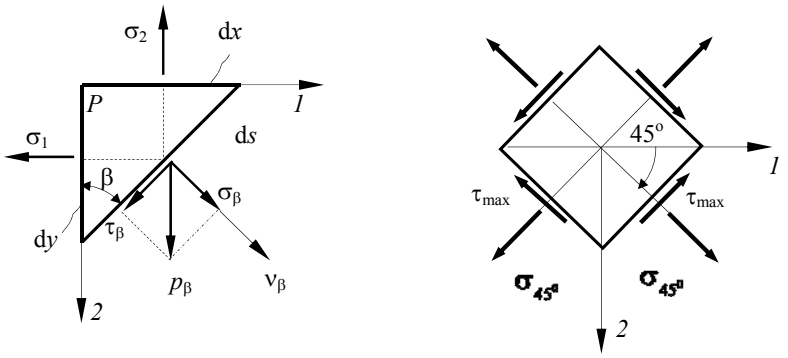
cunoscute sub numele de *ecuațiile diferențiale de echilibru ale lui Cauchy*.

În aceste ecuații, tensiunile se consideră calculate în punctul $P(x, y, z)$.

4.2. VARIAŢIA TENSIUNILOR ÎN JURUL UNUI PUNCT

În capitolul 3.4. atunci când s-au analizat tensiunile pe secțiuni înclinate la bare solicitate la încovoiere simplă, s-a definit starea plană de tensiuni şi s-au determinat tensiunile principale – relațiile (3.80) – şi direcțiile acestora.

Să consideram acum, un element de volum orientat după direcțiile principale de tensiuni (fig. 4.2, *a*) şi să determinăm tensiunile σ_β şi τ_β ce se dezvoltă într-un plan ce trece prin punctul $P(x, y, z)$ şi care face unghiul β cu direcția *2*.



a) b)

Fig. 4.2.

În acest caz formulele (3.76) devin:

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\beta$$
$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\beta \tag{4.2}$$

Pentru $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\sin 2\beta = 1$ şi valoarea tensiunii tangențiale, în modul, este maximă:

$$|\tau|_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{4.3}$$

În planul în care tensiunea τ este maximă, tensiunea normală σ are valoarea:

$$\sigma_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tag{4.4}$$

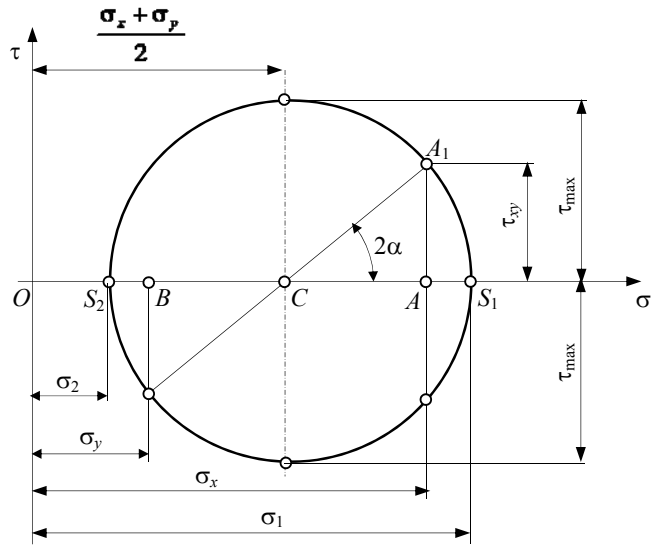


Fig. 4.3.

Rezultă că tensiunile tangențiale maxime acționează pe planele bisectoare ale planelor principale şi un element de volum orientat după aceste plane arată ca în figura 4.2, *b*.

O rezolvare grafică a variației tensiunilor în jurul unui punct a fost dată de Mohr. El a plecat de la relațiile (3.76) pe care le-a ridicat la pătrat şi le-a adunat, rezultând:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (4.5)$$

Relația (4.5) reprezintă, în sistemul de coordonate $\sigma O \tau$, ecuația unui cerc (cercul lui Mohr), având centrul pe axa $O\sigma$ de abscisă $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$, şi raza $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.

Acest cerc se reprezintă astfel (fig. 4.3):

– se reprezintă pe axa $O\sigma$ segmentele: $OA = \sigma_x$; $OB = \sigma_y$ şi $OC = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ (jumătatea segmentului *BA*) care este centru cercului; pentru σ_x , σ_y negative segmentele corespunzătoare se iau în sensul negativ al axei $O\sigma$;

– se reprezintă segmentul $AA_1 = \tau_{xy}$, în sensul axei $O\tau$ dacă $\tau_{xy} > 0$ şi în sens invers axei $O\tau$ dacă $\tau_{xy} < 0$;

– punctul A_1 fiind un punct de pe cercul definit de (4.5), cu centrul în C şi raza CA_1 se trasează cercul lui Mohr. Acest cerc taie axa $O\sigma$ în punctele S_1 şi S_2 ale căror abscise sunt σ_1, respectiv σ_2 (fig. 4.3)

Într-adevăr, folosind cercul lui Mohr:

$$\sigma_1 = OS_1 = OC + CS_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\ ;$$

$$\sigma_2 = OS_2 = OC - S_2C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

care sunt identice cu relațiile (3.76).

În cazul stării spațiale de tensiuni apar trei tensiuni principale σ_1, σ_2, σ_3 după trei direcții perpendiculare între ele numite direcții principale şi trei tensiuni tangențiale maxime, în secțiuni înclinate cu 45° față de direcțiile principale.

Grafic, variația tensiunilor în jurul unui punct, în cazul stării spațiale de solicitare, se reprezintă prin trei cercuri, ca în figura 4.4. Cercul de centru C_3 având $OC_3 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ şi diametrul $\sigma_1 - \sigma_2$ reprezintă variația tensiunilor în planul determinat de direcțiile lui σ_1 şi σ_2.

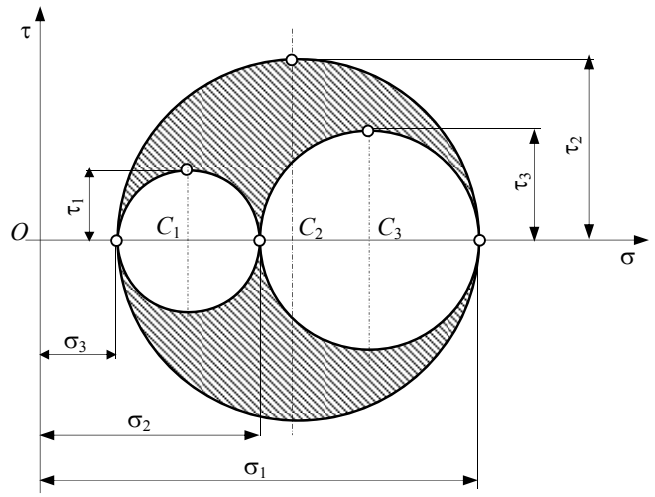


Fig. 4.4.

În acest plan apare o tensiune tangențială maximă $\tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$. Celelalte două cercuri C_1 (având $OC_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ şi diametrul $\sigma_2 - \sigma_3$) şi C_2(având $OC_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ şi diametrul $\sigma_1 - \sigma_3$) reprezintă variațiile tensiunilor în planele determinate de σ_2, σ_3 şi respectiv σ_1, σ_3. În aceste plane tensiunile tangențiale maxime sunt $\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$, $\tau_2 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

4.3. LEGEA GENERALIZATĂ A LUI HOOKE

În capitolul 1 atunci când s-au analizat aspectele problemelor rezistenței materialelor s-a arătat că legătura dintre tensiunile σ şi τ şi deformațiile specifice ε şi γ este de natură fizică. Pentru starea monoaxială de tensiune s-a determinat, pe cale experimentală, prin încercarea la tracțiune, legea simplă a lui Hooke, exprimată de relația (1.30). Pentru starea spațială de tensiuni, obținerea unor rezultate concludente pe cale experimentală nu este posibilă.

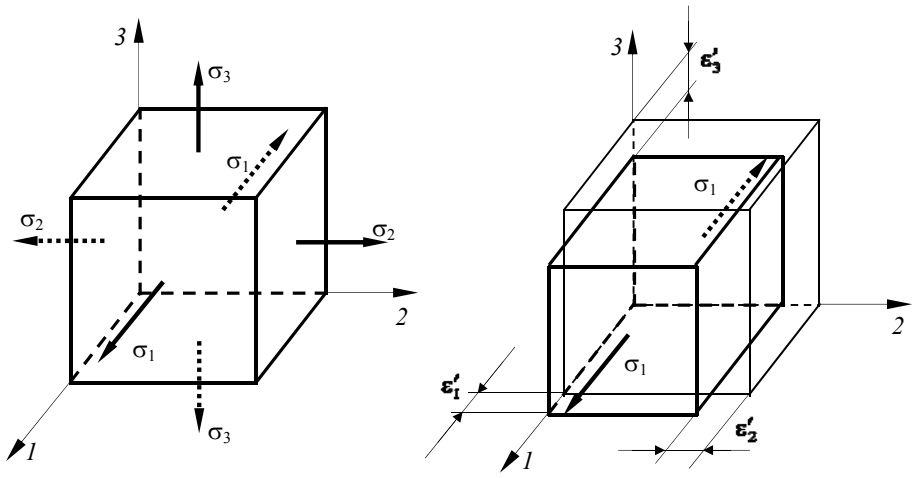
Funcția liniară, $\mathbf{T}_\varepsilon = f(\mathbf{T}_\sigma)$, pentru materialele perfect omogene şi izotrope, în cazul deformațiilor mici şi elastice, poate fi obținută pe cale deductivă (matematică).

Se consideră un element de volum cu latura egală cu unitatea (fig. 4.5, *a*), pe fețele căruia acționează tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3.

Deformațiile specifice ale elementului considerat pot fi calculate, admițând suprapunerea efectelor, adică considerând că solicitarea triaxială a particulei poate fi obținută prin suprapunerea a trei solicitări monoaxiale, aplicate pe rând pe cele trei direcții principale.

Astfel, acțiunea independentă a tensiunii σ_1 (fig. 4.5, *b*), pe baza formulei (1.30), produce o alungire $\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}$ pe direcția *1* şi două contracții specifice transversale $\varepsilon_2' = -\mu\frac{\sigma_1}{E}$, $\varepsilon_3' = -\mu\frac{\sigma_1}{E}$ pe direcțiile *2* şi *3*, aşa cum indică formula (3.22).

Analog, din acțiunea independentă a tensiunii σ_2 se obțin deformațiile specifice:



a) b)

Fig. 4.5.

$$\varepsilon_1'' = -\mu\frac{\sigma_{21}}{E}; \quad \varepsilon_2'' = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_3'' = -\mu\frac{\sigma_2}{E};$$

iar din acțiunea independentă a tensiunii σ_3, deformațiile specifice:

$$\varepsilon_1''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_2''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_3''' = \frac{\sigma_3}{E}.$$

Deformațiile specifice totale pe direcțiile *1*, *2*, *3*, suprapunând efectele, sunt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{1}{E}[\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_2''' = \frac{1}{E}[\sigma_2 - (\sigma_3 + \sigma_1)]; \\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_3''' = \frac{1}{E}[\sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Relațiile (4.6) reprezintă *legea generalizată a lui Hooke* raportată la direcțiile principale de tensiuni.

Dacă starea de tensiuni din punctul $P(x,y,z)$ este definită de tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$ descris de relația (1.3) legea generalizată a lui Hooke este definită de relațiile:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \tag{4.7}$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

Pentru tensiunile tangențiale τ legea lui Hooke păstrează forma simplă;

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \tag{4.8}$$

În relațiile de mai sus E este modulul de elasticitate longitudinal, G modulul de elasticitate transversal, μ coeficientul de contracție.

În cazul stării plane de tensiuni, pentru care $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, legea generalizată a lui Hooke este definită de relațiile:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x);$$
$$\varepsilon_z = -\mu\frac{1}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \tag{4.9}$$

sau față de direcțiile principale de tensiuni:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2);$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1); \tag{4.10}$$
$$\varepsilon_3 = -\mu\frac{1}{E}(\sigma_1 + \sigma_2);$$

Din primele două relații (4.9) rezultă tensiunile principale σ_1, σ_2 în funcție de deformațiile specifice principale ε_1, ε_2, în cazul stării plane de tensiuni:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2);$$
$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu \cdot \varepsilon_1) \tag{4.11}$$

6. TEORII DE REZISTENŢĂ

Din cele prezentate anterior s-a văzut că sub acțiunea forțelor exterioare şi a mişcării, în fiecare punct $P(x,y,z)$ dintr-un corp, considerat continuu, omogen şi izotrop, se dezvoltă o stare de tensiuni caracterizată prin tensorul tensiunilor $\mathbf{T}_\sigma$, sau mai sugestiv, prin tensorul tensiunilor principale

$$\overline{\mathbf{T}}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

în felul acesta starea de tensiuni poate fi privită ca o întindere sau compresiune triaxială (după direcțiile principale de tensiuni).

Dacă solicitările exterioare depăşesc o anumită limită, atunci într-un punct din interiorul corpului se poate dezvolta o stare de tensiuni care să conducă la deformații mari, ireversibile, sau chiar la rupere. Mecanica aplicată nu poate explica teoretic astfel de fenomene. Din această cauză, deoarece în practică sunt necesare evaluări cantitative privind apariția fenomenului considerat periculos sau inadmisibil, s-a introdus noțiunea de coeficientul de siguranță (aşa cum a fost definită în paragraful 1.7.3.

În cazul în care, într-un punct ce aparține unui corp, se dezvoltă o stare de tensiuni triaxială, definită de tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3, coeficientul de siguranță este:

$$c = \frac{\sigma_{01}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{02}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_{03}}{\sigma_3} \tag{6.2}$$

în care σ_{01}, σ_{02}, σ_{03} este o stare de tensiuni în acel punct, asemănătoare cu cea produsă de solicitările exterioare, la care însă se produce fenomenul considerat periculos sau inadmisibil. Starea de tensiuni σ_{01}, σ_{02}, σ_{03}, este denumită *stare de tensiuni limită.*

Pentru determinarea unei astfel de stări de tensiuni limită este necesară efectuarea de experiențe. Cum în practică acest lucru este imposibil, se recurge la

aşa numita *teorie a stărilor de tensiuni limită*, prin care orice stare de tensiuni dintr-un punct al uni corp se consideră că poate fi înlocuită – din punct de vedere al posibilității producerii fenomenului considerat inadmisibil sau periculos – cu o stare de tensiuni mai simplă (de exemplu cu starea limită de la întinderea simplă), denumită *stare de tensiuni echivalentă*. Această înlocuire se face pe baza unui *criteriu* ipotetic de apariție a fenomenului periculos.

Starea de tensiuni echivalentă trebuie să poată fi uşor de determinat pe bază de experiențe realizate în laborator. De asemenea, ea trebuie să caracterizeze materialul folosit din punct de vedere al comportării acestuia sub sarcină. Stările de tensiuni care îndeplinesc aceste cerințe sunt:

– starea de întindere maonoaxială: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, caracteristică încercării la tracțiune, pe baza căreia s-a determinat CCCT.

– starea plană mixtă (de forfecare pură): $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$.

Criteriul pe baza căruia starea de tensiuni reală dintr-un punct ce aparține unui corp este înlocuită cu o stare de tensiuni echivalentă, mai simplă, va fi reprezentat printr-un *factor*, considerat predominant la apariția unei stări de tensiuni limită. Expresia sa analitică determinându-se în funcție de proprietățile materialului, proprietăți determinate experimental.

Să presupunem că starea reală de tensiuni, într-un punct oarecare dintr-un corp, este caracterizată de valorile σ_1, σ_2, σ_3 ale tensiunilor principale din punctul respectiv (fig. 6.1, *a*)

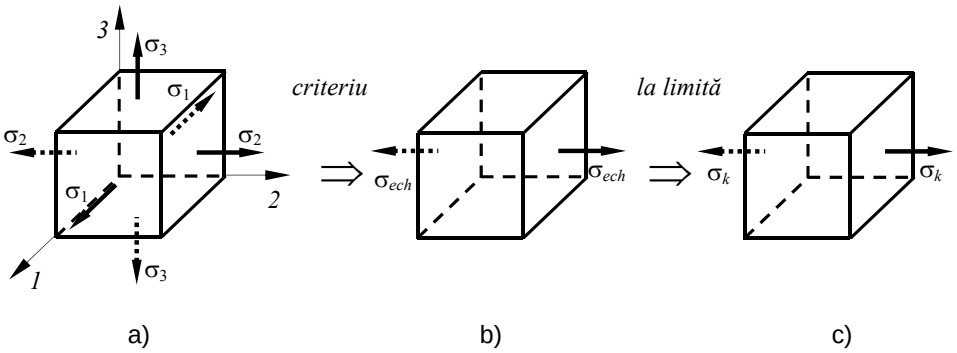


Fig. 6.1.

În baza criteriului adoptat, se calculează valoarea factorului corespunzător σ_{ech}, în funcție de tensiunile σ_1, σ_2, σ_3, valoare care este egală cu valoarea tensiunii σ în starea monoaxială de întindere echivalentă (fig. 6.1, *b*). Valoarea limită a tensiunii σ, determinată experimental pe baza încercării la tracțiune (în starea echivalentă monoaxială de întindere) pe o epruvetă din acelaşi material,

este σ_k. Aceasta poate fi limita de curgere aparentă R_e, sau rezistența la tracțiune R_m.

Comparând pe σ_{ech} cu σ_k (fig. 6.1, *c*), rezultă coeficientul de siguranță pentru starea reală de tensiuni din punctul respectiv:

$$c = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ech}}, \tag{6.3}$$

asemănătoare cu relația (1.25) de la întinderea simplă.

Se constată că tensiunea echivalentă poate fi reprezentată grafic, într-un sistem de coordonate trirectangulare (σ_1, σ_2, σ_3), printr-o suprafață de ecuație

$$\sigma_{ech} = f(\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}) \tag{6.4}$$

unde $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{03}$ reprezintă valorile limită ale tensiunilor principale σ_1, σ_2, σ_3, în punctul din corp unde se dezvoltă starea respectivă de tensiuni. Punctele situate în interiorul acestei suprafețe corespund unor stări de tensiuni care nu au atins limita, deci unor coeficienți de siguranță supraunitari. În starea plană de tensiuni se reprezintă intersecția suprafeței (6.4) cu planul $\sigma_3 = 0$.

Referitor la factorul ce poate fi considerat predominant la apariția unei stări de tensiuni limită, încercările de laborator efectuate pe epruvete solicitate la întindere au relevat că, în momentul ruperii, tensiunile σ şi τ, deformația specifică liniară ε şi energia specifică de deformație U_1 ating anumite valori corespunzătoare ruperii materialului respectiv. Se poate concluziona că ruperea, ca stare limită de tensiuni, este caracterizată de aceşti patru factori care nu sunt independenți între ei. Din această cauză la solicitarea de întindere simplă (monoaxială), pentru a defini o stare limită de tensiuni, este suficient să fie definit unul din cei patru factori menționați, ceilalți rezultând implicit.

Ipoteza că un anumit factor este predominat în atingerea stării de tensiuni limită şi că valoarea limită a acestuia este cea de la întindere simplă, constituie o *teorie de rezistență*.

Teoriile de rezistență se diferențiază în funcție de factorii aleşi ca predominanți în atingerea stării limită de tensiuni şi poartă numele acestor factori.

Următoarele teorii sunt cunoscute ca teorii clasice de rezistență:

– teoria I sau teoria tensiuni normale maxime (T_σ);

– teoria a II-a sau teoria deformației specifice maxime (T_ε);

– teoria a III-a sau teoria tensiunilor tangențiale maxime (T_τ);

– teoria a IV-a sau a energiei specifice de deformație (T_E);

– teoria a V-a sau a energiei specifice de deviație (T_{ED}).

Valabilitatea acestor teorii, pentru o anumită stare de solicitare, este probată cu ajutorul datelor experimentale.

6.1. TEORIA TENSIUNII NORMALE MAXIME

Această teorie se enunță astfel: starea limită (de curgere sau rupere) este atinsă într-un corp atunci când tensiunea normală maximă în valoare absolută este egală cu tensiunea corespunzătoare aceleiaşi stări limită la solicitarea de întindere simplă, şi a fost formulată pentru prima dată de Glileo Galilei în sec. XVII.

Deoarece orice stare de tensiuni este complet definită prin tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3, condițiile pentru a nu se depăşii starea limită se exprimă prin relațiile:

$$\begin{aligned} -\sigma_k \le \sigma_1 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k \le \sigma_2 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k \le \sigma_3 \le \sigma_k. \end{aligned} \tag{6.5}$$

În sistemul de coordonate (σ_1, σ_2, σ_3), condițiile (6.5) reprezintă un cub cu latura $2\sigma_k$, iar pentru situația plană de tensiuni ($\sigma_3 = 0$) un pătrat (fig. 6.2, *a*).

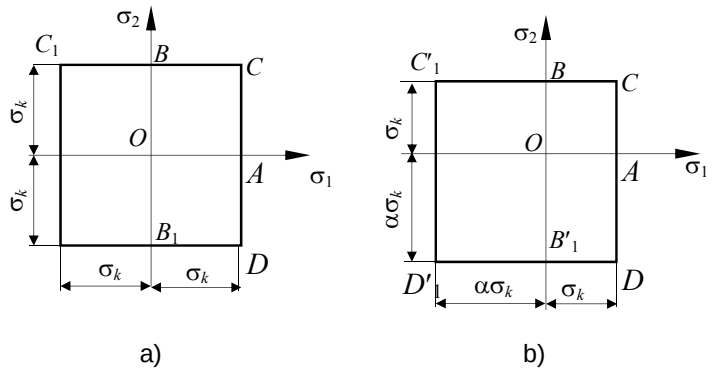


Fig. 6.2.

Pentru verificarea acestei teorii s-au făcut încercări de laborator. Conform acestei teorii ruperea s-ar produce atunci când tensiunea maximă devine egală cu rezistența la rupere $\sigma_1 = \sigma_r$. Încercându-se pietre, care la compresiune monoaxială au rezistența de rupere σ_r, s-a constatat că, supuse la presiune hidrostatică (adică $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$), rezistă mult mai mult decât la compresiunea simplă. Rezultă că numai tensiunea σ_1 nu poate caracteriza corect starea limită a corpului.

O îmbunătățire parțială a acestei teorii s-a obținut prin considerarea pentru

solicitarea de compresiune a limitei de rezistență $\sigma'_k = \alpha\sigma_k > \sigma_k$; ($\alpha$ >1). În acest caz suprafața limită rămâne tot un cub în spațiu, iar în plan un pătrat, însă originea axelor nu mai este în centrul său (fig. 6.2, *b*).

În concluzie, această teorie de rezistență poate fi folosită practic cu rezultate satisfăcătoare numai pentru stări de tensiuni de întindere.

Relația de calcul, după această ipoteză este:

$$\sigma_{ech\,I} = \max\,[\,|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\,] \le \sigma_a \tag{6.6}$$

pentru starea spațială de tensiuni;

$$\sigma_{ech\,I} = \max\,[\,|\sigma_1|, |\sigma_2|\,] \le \sigma_a \tag{6.7}$$

pentru starea plană de tensiuni.

6.2. TEORIA DEFORMAŢIEI SPECIFICE MAXIME

Această teorie a fost formulată de Mariotte în sec. XVII şi se enunță astfel: o stare limită este atinsă într-un corp atunci când deformația specifică maximă devine egală cu deformația corespunzătoare aceleiaşi stări limită la solicitarea de întindere simplă.

În cazul unei stări spațiale de deformație caracterizată prin deformațiile specifice principale ε_1, ε_2, ε_3, conform legii generalizate a lui Hooke condițiile impuse de această teorie sunt:

$$\begin{aligned}
-|\varepsilon'_k| \le \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \le \varepsilon_k;\\
-|\varepsilon'_k| \le \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \le \varepsilon_k;\\
-|\varepsilon'_k| \le \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \le \varepsilon_k;
\end{aligned} \tag{6.8}$$

unde ε'_k şi ε_k sunt deformațiile specifice limită în starea de compresiune, respectiv întindere monoaxială. Aceste condiții pot fi scrise şi sub forma:

$$\begin{aligned}
-\alpha\sigma_k &\le \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_k;\\
-\alpha\sigma_k &\le \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) \le \sigma_k;\\
-\alpha\sigma_k &\le \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \le \sigma_k.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Cum $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ atunci $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1$ şi teoria a doua de rezistenţă se scrie astfel

$$\sigma_{ech\,II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_a \qquad (6.10)$$

Această teorie a avut în trecut o mare răspândire, care se explică prin faptul că măreşte zona stărilor limită nepericuloase de compresiune triaxială. Însă nici această teorie nu a fost confirmată în toate cazurile experimentale, rezultatele încercărilor făcute pe materiale tenace, cum ar fi oţelurile moi, nu au verificat-o.

6.3. TEORIA TENSIUNILOR TANGENŢIALE MAXIME

Această teorie a fost formulată de Coulomb (1773) şi sub forma actuală de Tresca în 1856. Conform acestei teorii de rezistenţă starea limită este atinsă într-un corp, atunci când tensiunea tangenţială devine egală cu tensiunea tangenţială corespunzătoare aceleiaşi stări limită la solicitarea de întindere simplă.

Cunoscând tensiunile tangenţiale maxime:

$$\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \; \tau_2 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (6.11)$$

şi valoarea limită la întindere

$$\tau_k = \frac{\sigma_k}{2} \qquad (6.12)$$

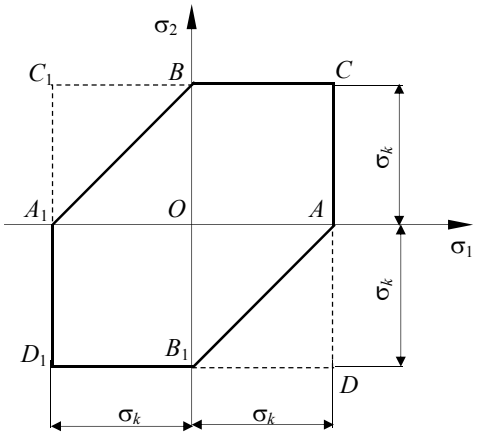


Fig.6.3.

pentru a nu se depăşii starea limită, trebuiesc îndeplinite condiţiile:

$$\begin{aligned} -\tau_k &\le \tau_1 \le \tau_k; \\ -\tau_k &\le \tau_2 \le \tau_k; \\ -\tau_k &\le \tau_3 \le \tau_k. \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Ţinând seama de relaţiile (6.11) şi (6.12) condiţiile (6.13) devin

$$\begin{aligned} -\sigma_k &\le \sigma_2 - \sigma_3 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k &\le \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k &\le \sigma_1 - \sigma_2 \le \sigma_k. \end{aligned} \qquad (6.14)$$

Pentru semnul egal între termeni, relațiile (6.14) reprezintă o prismă hexagonală având ca axă trisectoarea $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Intersecția suprafeței exterioare a prismei cu planul $\sigma_3 = 0$, definește zona limită corespunzătoare stării plane de tensiuni, reprezentată de un hexagon neregulat având ecuațiile conturul deduse din condițiile (6.14)(fig. 6.3):

Pentru cazurile practice, în care nu trebuie depășită rezistența admisibilă σ_a, teoria a III-a se poate scrie astfel:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \max\,[\,|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\,] \le \sigma_a. \tag{6.15}$$

Pentru starea plană de tensiuni ($\sigma_3 = 0$) condiția de rezistență (6.15) ia forma:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \max\,[\,|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\,] \le \sigma_a. \tag{6.16}$$

Teoria tensiunilor tangențiale maxime a fost confirmată de rezultatele experimentale, în special de încercările efectuate pe materiale tenace. Această ipoteză a fost verificată și de încercările de compresiune hidrostatică pe materiale fragile. Din această cauză, pentru calculele inginerești de proiectare această teorie este recomandată chiar dacă uneori conduce la o ușoară supradimensionare a elementelor proiectate.

6.4. APLICAREA TEORIILOR DE REZISTENȚĂ LA BARE

După cum s-a arătat în capitolul 1, tensorul tensiunilor în cazul barelor este definit de expresia (1.9), având componentele σ_x, τ_{xy} și τ_{xz}. În acest caz tensiunile principale calculate cu relațiile (3.80) sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}\,; \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}\,; \end{aligned} \tag{6.17}$$

unde $\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$.

Se observă că, la bare, tensiunile principale sunt de semne contrare și deci $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$.

În acest caz condițiile de rezistență (6.7), (6.10) și (6.16), după teoriile T_σ, T_ε și T_τ capătă formele:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{I}} = \max\,[\,|\sigma_1|, |\sigma_2|\,] = \frac{1}{2}\,(\,|\sigma_x| + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}\,) \le \sigma_a \tag{6.18}$$

$$\sigma_{ech\,\mathrm{II}} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 = \frac{1-\mu}{2}\cdot|\sigma_x| + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \le \sigma_a \tag{6.19}$$

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \max\,[\,|\sigma_1 - \sigma_2|\,] = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \le \sigma_a. \tag{6.20}$$

În cazul în care $\sigma_x = 0$ teoria T_σ nu are valabilitate, iar toariile T_ε şi T_τ devin:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{II}} = (1+\mu)\tau \le \sigma_a; \tag{6.21}$$

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = 2\tau \le \sigma_a\,; \tag{6.22}$$

sau, sub forma utilizată deja în acest curs:

$$\tau_{\max} \le \tau_a \tag{6.23}$$

în care $\tau_a = 0{,}77\sigma_a$ pentru teoria T_ε şi $\tau_a = 0{,}5\sigma_a$ pentru T_ε.

7. SOLICITĂRI COMPUSE ALE BARELOR DREPTE

Solicitările compuse ale barelor drepte sunt solicitările în cadrul cărora torsorul eforturilor secționale se reduce la două sau mai multe dintre componentele N, M_x, M_y, M_z.

În funcție de eforturile secționale care se dezvoltă într-o secțiune oarecare a barei, solicitările compuse se identifică astfel:

– încovoiere dublă sau oblică; în secțiunea transversală a barei există componentele M_y şi M_z;

– încovoiere simplă cu forță axială; există eforturile N, M_y sau N, M_z;

– încovoiere dublă cu forță axială; componentele care apar sunt N, M_y şi M_z;

– încovoiere cu torsiune, atunci când componentele care apar sunt M_x, M_y, sau M_x, M_z, sau M_x, M_y, M_z.

Calculul tensiunilor şi deformațiilor barelor drepte în cazul solicitărilor compuse se va face prin suprapunere de efecte ca urmare a menținerii valabilității

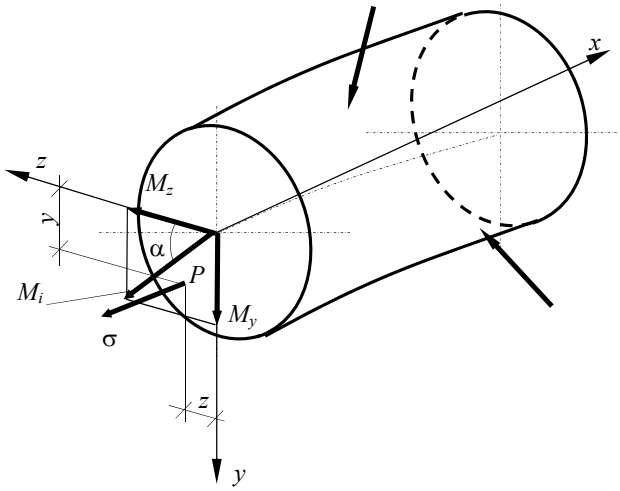


Fig.7.1.

ipotezei micilor deplasări şi legii lui Hooke.

7.1. ÎNCOVOIEREA DUBLĂ SAU OBLICĂ

În acest caz în planul secțiunii transversale a barei apar componentele M_y şi M_z dirijate după axele centrale principale de inerție Oy, respectiv Oz (fig. 7.1). Cele două componente provin din descompunerea momentului de încovoiere M_i a cărui direcție face cu axa Oz unghiul α:

$$M_y = M_i \sin\alpha; \qquad M_z = M_i \cos\alpha; \tag{7.1}$$

7.1.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Dacă se consideră că bara este solicitată independent de fiecare componentă a momentului de încovoiere M_i atunci, în baza formulei lui Navier, pe secțiune se dezvoltă tensiuni σ care au o distribuție liniară (fig. 7.2.) şi a căror valoare într-un punct P oarecare al secțiunii, de coordonate (y, z) se determină cu relațiile:

$$\sigma_{My} = -\frac{M_y}{I_y} z; \qquad \sigma_{Mz} = \frac{M_z}{I_z} y; \tag{7.2}$$

Prin însumarea celor două tensiuni σ, ținând seama de semnul lor, se determină valoarea tensiunii reale în punctul P:

$$\sigma^P = \sigma^P_{Mz} + \sigma^P_{My} = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z\,. \tag{7.3}$$

Se poate observa că tensiunea σ variază liniar pe secțiune, având valoarea zero pe o dreaptă – *axa neutră* – care trece prin centrul de greutate O şi a cărei ecuație rezultă din condiția $\sigma = 0$:

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0\,.$$

Unghiul β pe care îl face axa neutră cu axa Oz se determină cu relația:

$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = \frac{I_z}{I_y} \tan\alpha\,. \tag{7.4}$$

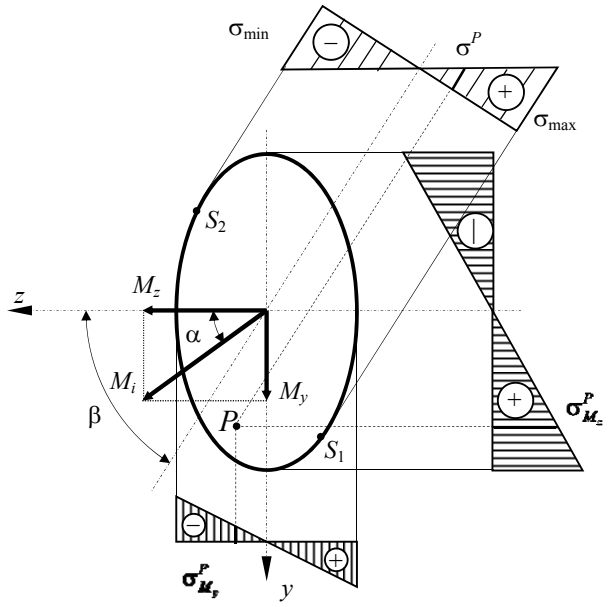


Fig. 7.2.

Când $I_z > I_y$ atunci $\beta > \alpha$ şi axa neutră are o înclinare faţă de axa Oz mai mare decât înclinarea momentului M_i. Dacă $I_z = I_y$ (cazul secţiunilor circulare, pătrate) axa neutră coincide cu direcţia momentului încovoietor M_i, iar bara este supusă la încovoiere simplă.

Pentru a identifica punctele de pe secţiune unde se dezvoltă tensiunile maxime şi minime, deci punctele cele mai depărtate de axa neutră, se duc tangente la conturul secţiunii, paralele cu axa neutră (fig. 7.2).

Valoarea acestor tensiuni se determină înlocuind în relaţia (7.3) coordonatele punctelor respective S_1 (y_1, z_1) şi S_2 (y_2, z_2):

$$\sigma_{\max} = \sigma_{S_1} = \frac{M_z}{I_z} y_1 - \frac{M_y}{I_y} z_1; \quad \sigma_{\min} = \sigma_{S_2} = \frac{M_z}{I_z} y_2 - \frac{M_y}{I_y} z_2; \tag{7.5}$$

7.1.2. Calculul de rezistenţă

Dacă materialul din care este confecţionată bara are aceeaşi rezistenţă admisibilă σ_a la întindere şi compresiune atunci condiţia de rezistenţă a unei bare solicitată la încovoiere dublă este:

$$\sigma_{\max} = \max\,[\,|\sigma_{S_1}|, |\sigma_{S_2}|\,] \le \sigma_a. \tag{7.6}$$

Deoarece, în general, secțiunea transversală a barei este caracterizată de mai mulți parametrii, relația (7.6) nu poate fi transformată într-o relație de dimensionare. Din această cauză dimensionarea se face prin încercări. Se adoptă anumite dimensiuni pentru secțiune şi se verifică condiția (7.6). Dacă aceasta este îndeplinită atunci dimensiunile sunt bune. În cazul în care condiția (7.6) nu este îndeplinită cu dimensiunile adoptate, atunci acestea se majorează până când condiția este verificată.

7.1.3. Cazul secţiunilor dreptunghiulare şi al celor care se încadrează într-un dreptunghi cu colţurile pline

După cum s-a arătat punctele S_1 şi S_2 în care tensiunea σ are valori maxime, respectiv minime, se identifică destul de greu, uneori chiar prin încercări repetate. Există însă situații în care cele două puncte se pot identifica uşor şi repede. Este cazul secțiunilor dreptunghiulare şi al celor care se încadrează într-un dreptunghi cu colțurile pline (U, I). La aceste secțiuni punctele S_1 şi S_2 vor fi situate în două colțuri opuse (fig. 7.3).

Valoarea tensiunilor maxime şi minime este:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_{S_1} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}; \\ \sigma_{\min} &= \sigma_{S_2} = -\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{I_y}\right); \end{aligned} \tag{7.7}$$

Folosind aceste valori, condiția de rezistență (7.6) capătă forma:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z}\left(1 + \frac{|M_y|}{|M_z|} \cdot \frac{W_z}{W_y}\right) \le \sigma_a \tag{7.8}$$

Deoarece raportul W_z/W_y poate fi apreciat (la secțiuni dreptunghiulare $W_z/W_y = h/b$, iar la profile U şi I variază între 7 şi 10) relația (7.8) poate fi utilizată pentru dimensionare:

$$W_z^{nec} = \frac{|M_z|}{\sigma_a}\left(1 + \frac{|M_y|}{|M_z|}\frac{W_z}{W_y}\right) = W_z^{\dim} \tag{7.9}$$

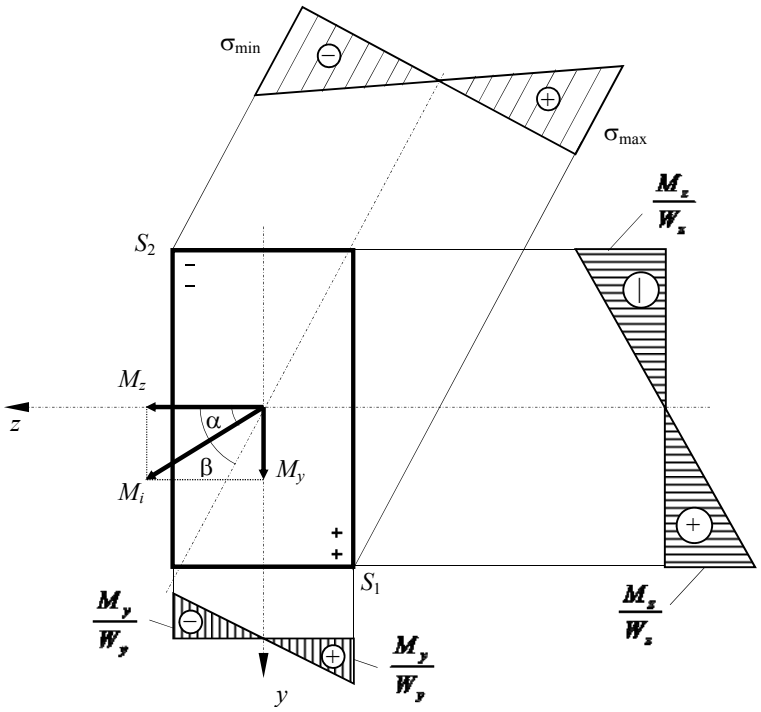


Fig. 7.3.

Calculul de dimensionare decurge în modul următor:

– se alege valoarea raportului W_z/W_y în funcție de tipul secțiunii şi se calculează W_z^{nec} cu formula (7.9);

– se determină dimensiunile secțiunii din condiția $W_z^{nec} = W_z^{\dim}$ şi se verifică condiția (7.8); dacă aceasta nu este îndeplinită, se modifică dimensiunile secțiunii până când relația (7.8) este verificată.

7.2. ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ CU FORŢĂ AXIALĂ

Cele două componente ale torsorului eforturilor secționale care apar în planul secțiunii drepte în cazul solicitării de încovoiere simplă cu forță axială şi anume N, M_z sau N, M_y, sunt echivalente cu o forță excentrică $\vec{\mathcal{N}}$ al cărui punct de aplicație se află fie pe axa Oy, fie pe axa Oz. Dacă în secțiunea transversală apar N

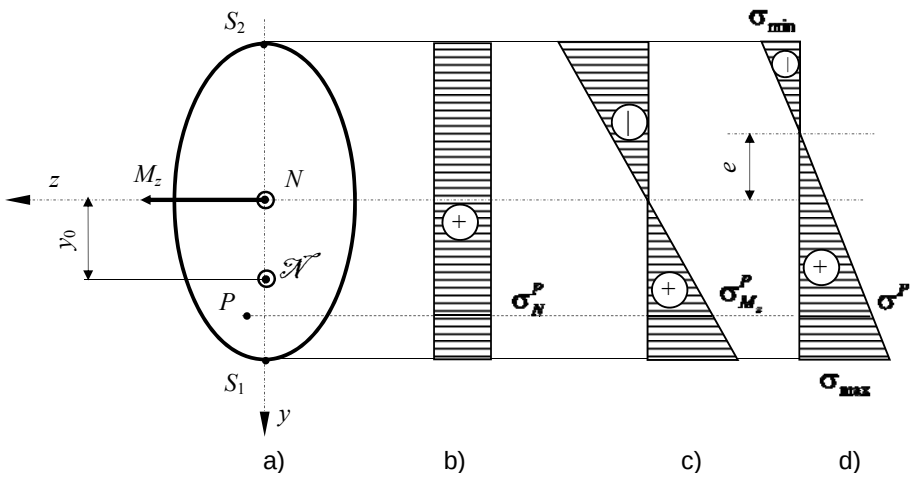


Fig. 7.4.

şi M_z, atunci legătura dintre $\mathcal{N}$ şi aceste eforturi secţionale este:

$$N = \mathcal{N}; \quad M_z = N \cdot y_0 \tag{7.10}$$

unde y_0 este distanţa de la punctul de aplicaţie al forţei excentrice la axa z (fig. 7.4, *a*).

7.2.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Forţa axială N produce pe secţiunea dreaptă a barei tensiuni $\sigma_N = \dfrac{N}{A}$ care sunt constante în toate punctele secţiunii (fig. 7.4, *b*), iar momentul încovoietor M_z tensiuni $\sigma_{M_z} = \dfrac{M_z}{I_z} y$ care au o variaţie liniară pe secţiune (fig. 7.4, *c*). Aplicând suprapunerea de efecte în punctul P de coordonate (y, z) valoarea tensiunii totale σ se determină cu relaţia:

$$\sigma^P = \sigma_N^P + \sigma_{Mz}^P = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y\,, \tag{7.11}$$

a cărei variaţie este redată în figura 7.4, *d*.

Din condiţia $\sigma = 0$ se obţine ecuaţia axei neutre

$$y = e = -\frac{I_z}{A}\frac{N}{M_z}, \tag{7.12}$$

care arată că axa neutră este paralelă cu *Oz* (axa vectorului moment încovoietor în acest caz), la depărtarea *e* de aceasta şi situată în partea opusă celei în care este aplicată forţa excentrică $\mathcal{N}$.

Valorile maxime şi minime ale tensiunii σ se regăsesc în punctele S_1 şi S_2, cele mai depărtate de axa neutră şi se determină cu relaţiile:

$$\sigma_{S_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_{S_1}; \quad \sigma_{S_2} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y_{S_2}. \tag{7.13}$$

Dacă axa *Oz* este axă de simetrie a secţiunii atunci $y_{S_1} = |y_{S_2}| = y_{\max}$ (fig. 7.5, *a*), şi relaţiile (7.13) capătă forma:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{S_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z}; \quad \sigma_{\min} = \sigma_{S_2} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z}; \tag{7.14}$$

deoarece $W_z = \dfrac{I_z}{y_{\max}}$ reprezintă modulul de rezistenţă la încovoiere.

7.2.2. Calculul de rezistenţă

Dacă materialul barei are aceeaşi rezistenţă admisibilă la întindere şi compresiune condiţia de rezistenţă pentru o bară dreaptă solicitată la încovoiere cu forţă axială este:

$$\sigma_{\max} = \max\,[\,|\sigma_{S_1}|, |\sigma_{S_2}|\,] \le \sigma_a. \tag{7.15}$$

În cazul secţiuni oarecare nu este posibilă o dimensionare directă deoarece în relaţia (7.15), în general, apar mai mulţi parametrii. Din această cauză dimensionarea se face prin încercări: se alege o secţiune, se calculează tensiunile cu relaţiile (7.13) şi se introduc în (7.15); dacă condiţia de rezistenţă nu este îndeplinită se modifică secţiunea până când este verificată relaţia (7.15).

În cazul secţiunilor simetrice în raport cu axa *Oz* (fig.7.5) condiţia de rezistenţă (7.15) capătă forma:

$$\sigma_{ech} = \sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} \le \sigma_a, \tag{7.16}$$

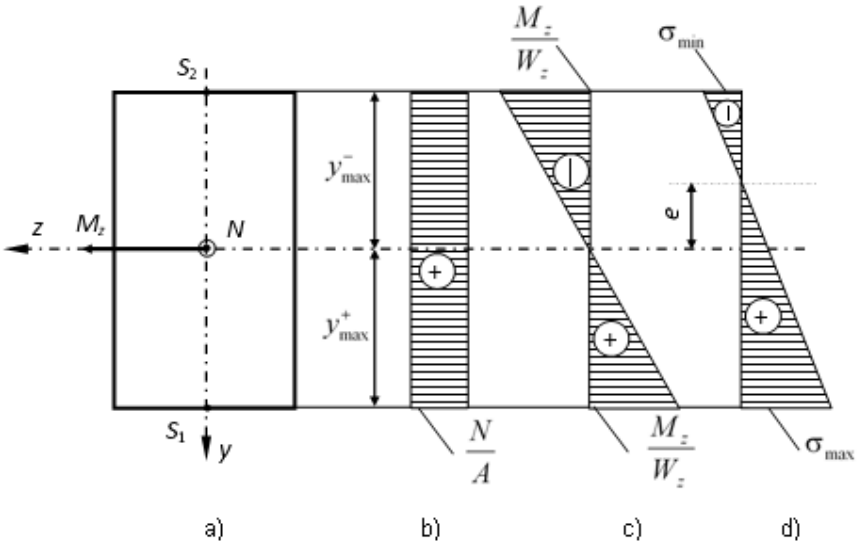


Fig. 7.5.

iar calculul de rezistență decurge astfel:

– se face o predimensionare a barei la încovoiere simplă cu relația (3.65);

– se majorează dimensiunea calculată pentru a ține seama şi de forța axială şi se face verificarea cu relația (7.16);

– dacă nu este satisfăcută condiția (7.16) atunci se modifică secțiunea până când această condiție este îndeplinită.

Sunt materiale care au o comportare foarte buna la compresiune şi slabă la întindere, ca de exemplu betonul armat utilizat la confecționarea fundațiilor. În aceste situații este necesar ca pe secțiunile elementelor de tip bară confecționate din astfel de materiale şi solicitate la încovoiere cu forță axială, să se dezvolte numai tensiuni de compresiune. Cu alte cuvinte axa neutră să nu intersecteze secțiunea, cel mult să fie tangentă la ea.

De exemplu, pentru o secțiune dreptunghiulară (fig. 7.6, *a*) ținând seama de egalitățile (7.10) se obține expresia tensiunii σ:

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{12 y_0}{h^2} y\right). \tag{7.17}$$

În punctele extreme ale secțiunii, la $y = \pm h/2$, rezultă valorile:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{N}{A}\left(1 \pm \frac{6 y_0}{h}\right). \tag{7.18}$$

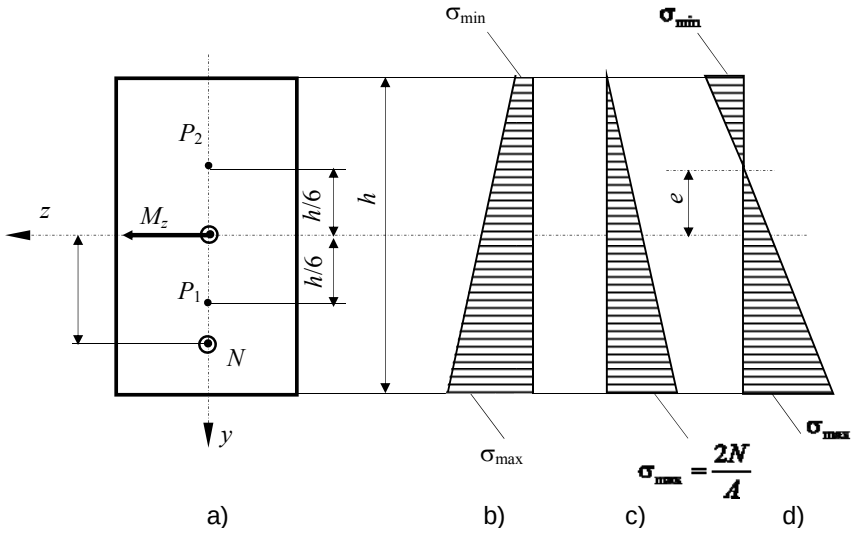


Fig. 7.6.

Se constată că, dacă forţa normală excentrică $\mathcal{N}$ este aplicată în intervalul $y_0 \in (-h/6, +h/6)$, adică în interiorul segmentului P_1P_2 (fig 7.6, *a*), care constituie treimea mijlocie a secţiunii, axa neutră nu intersectează secţiunea şi tensiunile pe secţiune au acelaşi semn (fig. 7.6, *b*). Pentru $y_0 = \frac{h}{6}$ axa neutră este tangentă la secţiune (fig. 7.6, *c*), iar tensiunile au valorile $\sigma_{min} = 0$ şi $\sigma_{max} = 2N/A$ valoarea maximă a tensiunii fiind întotdeauna de aceeaşi parte cu punctul de aplicaţie al forţei normale excentrice $\mathcal{N}$. Dacă $y_0 > h/6$ sau $y_0 > -h/6$, adică forţa normală excentrică $\mathcal{N}$ este aplicată în afara treimii mijlocii a secţiunii, axa neutră taie secţiunea la ordonata *e* determinată cu relaţia (7.12) (fig. 7.6, *d*).

7.3. ÎNCOVOIEREA DUBLĂ CU FORŢĂ AXIALĂ

În acest caz, în orice secţiune dreaptă a barei, sau a unui tronson dintr-o bară, eforturile secţionale se reduc la efortul axial *N* şi la momentele încovoietoare M_y şi M_z, sau la o forţă normală excentrică $\mathcal{N}$ aplicată într-un punct de coordonate y_0, z_0 (fig. 7.7). Între forţa $\mathcal{N}$ şi eforturile secţionale *N*, M_y şi M_z există relaţiile:

$$N = \mathcal{N};\ M_z = N \cdot y_0; \qquad M_y = -N \cdot z_0. \tag{7.19}$$

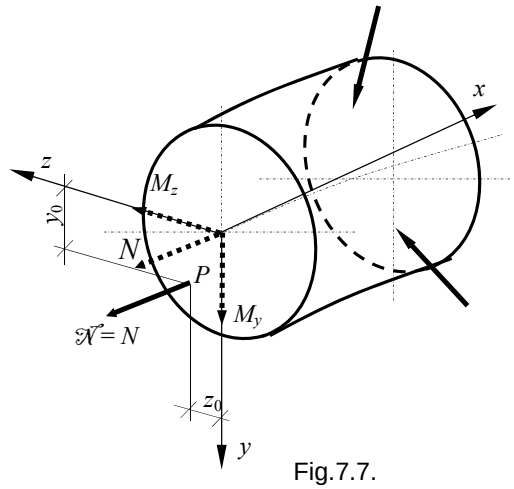


Fig.7.7.

7.3.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Să considerăm că forța excentrică $\mathcal{N}$ este poziționată astfel încât reducerea sa în centrul de greutate al secțiunii conduce la eforturile secționale N, M_z şi M_y pozitive, aşa cum se poate observa în figura 7.8.

Deoarece eforturile secționale N, M_z şi M_y produc tensiuni σ, aplicând principiul suprapunerii eforturilor, într-un punct oarecare P de pe secțiune se va dezvolta tensiunea:

$$\sigma^P = \sigma_N^P + \sigma_{Mz}^P + \sigma_{My}^P = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z \,. \tag{7.20}$$

Din condiția σ = 0 se obține ecuația axei neutre, care se pune sub forma:

$$\frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1 \tag{7.21}$$

ale cărei tăieturi y_1, z_1 se exprimă prin formulele:

$$y_1 = -\frac{N}{M_z} \cdot \frac{I_z}{A}; \qquad z_1 = \frac{N}{M_y} \cdot \frac{I_y}{A} \,. \tag{7.22}$$

Ținând seama de relațiile (7.19) tăieturile axei neutre se pot scrie astfel:

$$y_1 = -\frac{1}{y_0} \cdot \frac{I_z}{A}; \quad z_1 = -\frac{1}{z_0} \cdot \frac{I_z}{A} \,. \tag{7.23}$$

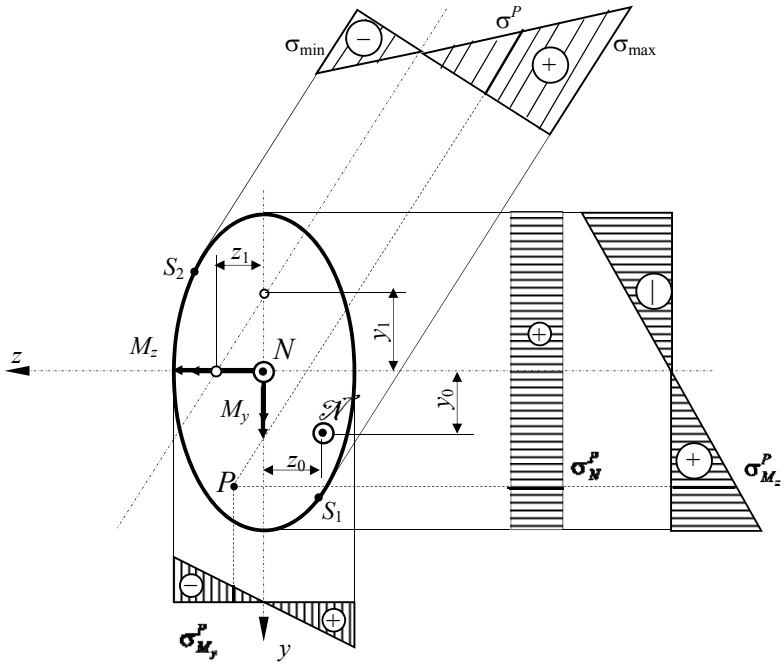


Fig. 7.8.

Deoarece aria A, şi momentele de inerţie axiale I_y şi I_z sunt întotdeauna pozitive, se observă că tăieturile axei neutre (y_1, z_1) şi coordonatele punctului de aplicaţie al forţei normale excentrice (y_0, z_0) sunt de semne contrarii. Din această cauză axa neutră şi punctul de aplicaţie al forţei excentrice sunt situate în cadrane opuse (fig.7.8).

Pentru identificarea punctelor de pe secţiune în care tensiunile σ au valori maxime, se calculează mai întâi coordonatele (y_0, z_0) ale punctului de aplicaţie al forţei excentrice, apoi, cu relaţiile (7.23), tăieturile axei neutre. După trasarea axei neutre, se duc tangente la conturul secţiunii transversale, paralele cu axa neutră şi se identifică punctele S_1 şi S_2, care sunt punctele cele mai solicitate de pe secţiune.

În aceste puncte tensiunile sunt:

$$\sigma_{S_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{S_1} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{S_1}$$
$$\sigma_{S_2} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{S_2} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{S_2} \qquad (7.24)$$

7.3.2. Calculul de rezistenţă

Valorile tensiunilor σ_{S_1} şi σ_{S_2} nu trebuie să depăşească valoarea tensiunii admisibile a materialului din care este confecţionată bara:

$$\sigma_{\max} = \max\,[\,|\sigma_{S_1}|, |\sigma_{S_2}|\,] \le \sigma_a. \tag{7.25}$$

Deoarece condiţia de rezistenţă (7.25) nu pot fi transformată în formulă de dimensionare, proiectarea barelor supuse la încovoiere dublă cu forţă axială se face prin încercări: se aleg anumite dimensiuni pentru secţiune şi dacă condiţia de rezistenţă nu este îndeplinită acestea se modifică până când aceasta este îndeplinită corespunzător.

Ca şi în cazul solicitărilor de încovoiere dublă şi încovoiere simplă cu forţă axială, în cazul secţiunilor dreptunghiulare punctele S_1 şi S_2 sunt situate în două colţuri opuse ale secţiunii (fig. 7.9). În această situaţie, deoarece $y_{S_1} = y_{\max} = |y_{S_2}|$

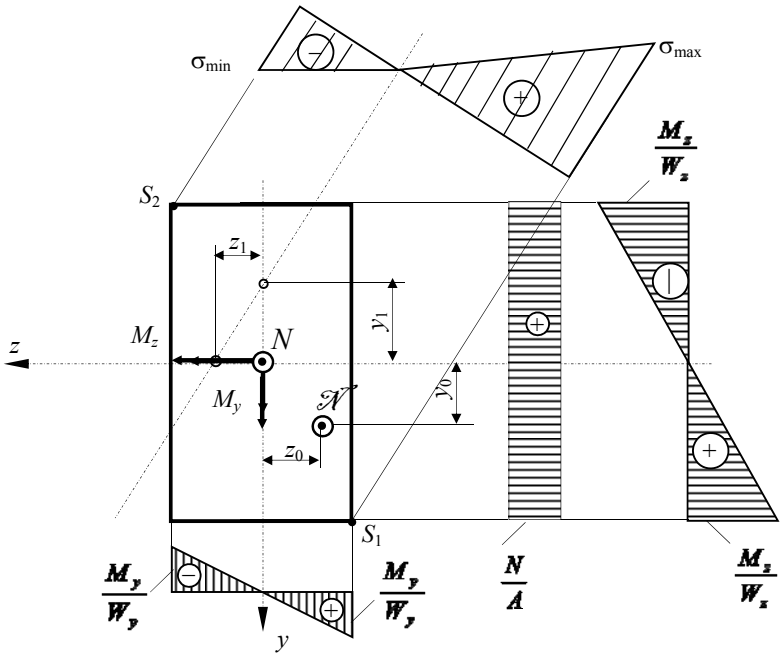


Fig. 7.9.

şi $\left|z_{S_1}\right| = z_{\max} = z_{S_2}$, tensiunile în punctele cele mai solicitate sunt:

$$\sigma_{S_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}; \qquad \sigma_{S_2} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y}. \tag{7.26}$$

Dacă materialul din care este confecţionată bara are aceeaşi rezistenţă admisibilă la întindere şi compresiune, condiţia de rezistenţă (7.25) devine:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \le \sigma_a. \tag{7.27}$$

Pentru secţiuni circulare, pătrate şi dreptunghiulare, la care se dă raportul h/b, sau pentru secţiuni compuse a căror geometrie depinde de un singur parametru, condiţia (7.27) se transformă pentru dimensionare într-o ecuaţie de gradul trei.

Calculul practic de dimensionare cuprinde următoarele etape:

– se neglijează efectul forţei axiale şi se face o dimensionare la încovoiere oblică cu formula (7.9);

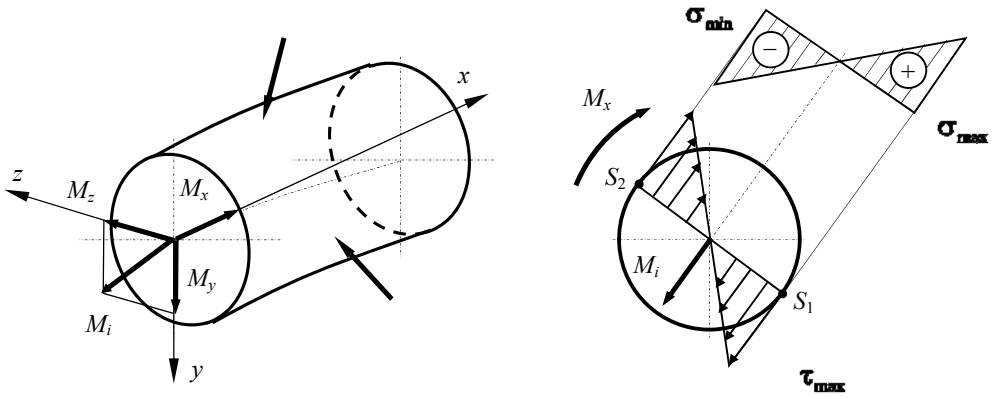
– se adoptă dimensiunile secţiunii ţinând seama de influenţa forţei axiale şi a raportului W_z/W_y, după care, obligatoriu, se face verificarea condiţiei de rezistenţă (7.27).

7.4. ÎNCOVOIEREA CU TORSIUNE A BARELOR DREPTE CU SECŢIUNE CIRCULARĂ

O bară este solicitată la încovoiere cu torsiune atunci când în secţiunea transversală a sa apare pe lângă momentul de torsiune M_x cel puţin unul din momentele de încovoiere M_y şi M_z.

7.4.1. Distribuţia tensiunilor pe secţiunea dreaptă a barei

Deoarece în cazul secţiunii circulare orice axă care trece prin centrul O este o axă de simetrie şi deci implicit axă centrală principală de inerţie, momentele M_y şi M_z se compun şi formează momentul de încovoiere M_i, a cărui direcţie este chiar axa neutră (fig. 7.10, *a*). În consecinţă încovoierea este întotdeauna simplă şi din



a) b)

Fig. 7.10.

distribuția tensiunilor σ (fig. 7.10, *b*) rezultă că în punctele S_1 şi S_2 se dezvoltă tensiunile maxime, respectiv minime ale căror valori sunt:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_i}{W_i}, \tag{7.28}$$

unde $W_i = \pi D^3/32$ reprezintă modulul de rezistență la încovoiere.

Tensiunile tangențiale τ produse de momentul de torsiune M_x au valori maxime pe conturul secțiunii şi o variație liniară pe orice diametru al acesteia. Deci, în punctele S_1 şi S_2:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \tag{7.29}$$

unde $W_p = \pi D^3/16$ reprezintă modulul de rezistență la torsiune.

Se constată că în cazul încovoierii cu torsiune se dezvoltă atât tensiuni σ cât şi tensiuni τ, fapt ce conduce la utilizarea teoriilor de rezistență la calculul de proiectare sau verificare.

7.4.2. Calculul de rezistenţă

Deoarece în punctul S_1 se dezvoltă atât σ_{max} cât şi τ_{max}, în acest punct se va calcula σ_{ech}. De exemplu în baza teoriei de rezistență T_τ (teoria a III-a) aplicată la bare:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,. \tag{7.30}$$

Dacă în (7.30) se introduc expresiile lui σ_{max} cât şi τ_{max} rezultă:

$$\sigma_{ech} = \frac{M_i}{W_i}\sqrt{1+\left(\frac{M_x}{M_i}\right)^2} = \frac{M_i}{W_i}K_{T_\tau} \le \sigma_a \tag{7.31}$$

Coeficientul K_T este în funcţie de teoria de rezistenţă utilizată pentru calculul lui σ_{ech}.

Condiţia de rezistenţă (7.31) poate fi utilizată pentru dimensionare:

$$W_i^{nec} = \frac{M_i}{\sigma_a}K_{T_\tau} = W_i^{\dim} \tag{7.32}$$

De multe ori însă, pe lângă condiţia de rezistenţă (7.31) se impune şi o condiţie de rigiditate de forma (3.114). Dacă se constată că dimensiunile secţiunii nu verifică condiţia (3.114) atunci dimensionarea barei se va face astfel:

$$I_p^{nec} = \frac{M_x}{G\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a} = I_p^{\dim} \tag{7.33}$$

unde $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$ reprezintă momentul de inerţie polar al secţiunii barei.

Probleme rezolvate

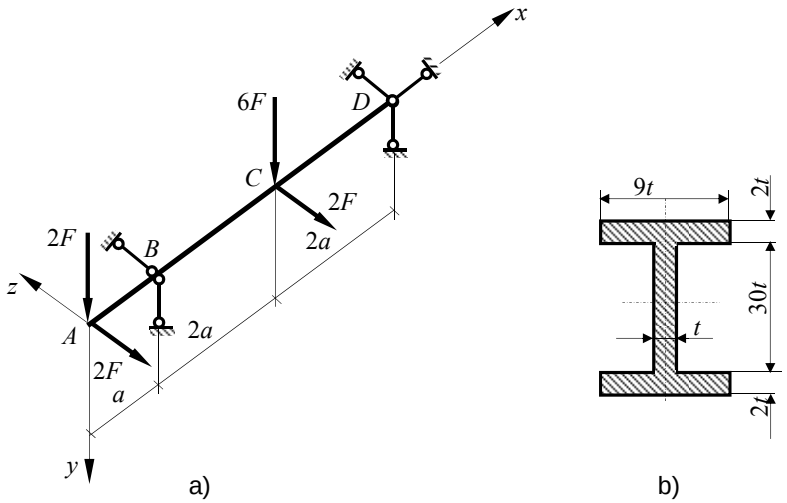
P.7.1. Bara *ABCD* din figura 7.11, *a* este acţionată de forţe concentrate atât în planul *xOy* cât şi în planul *xOz* şi are secţiunea în formă de I (fig. 7.11, *b*). Ştiind că F = 1,2 kN, a = 0,8 m şi σ_a = 150 N/mm^2 să se dimensioneze economic bara şi să se traseze variaţia tensiunilor σ în secţiunea *B*.

Trebuiesc trasate mai întâi diagramele de eforturi. Se determină diagrama $\underline{M_z}$ (fig. 7.11, *c*) cu forţele din planul *xOy* şi diagrama M_y (fig. 7.11, *d*) cu forţele din planul *xOz* (în fig. 7.11, *d*, axa *z* este orientată în sus pentru a păstra convenţia de semne pentru momentele încovoietoare şi în planul *xOz*).

Dimensionarea barei se face cu valorile eforturilor secţionale din secţiunea periculoasă. Secţiunea periculoasă poate fi în *C*, unde $M_z = 5Fa$ este maxim, sau în *B* unde $M_y = 2Fa$ este maxim. Din această cauză dimensionarea se face cu valorile eforturilor secţionale din *C* şi apoi se va verifica şi secţiunea *B*.

Deoarece în secţiunea *C*, $M_z = 5\text{Fa} > |M_y| = 2Fa$, pentru o dimensionare economică secţiunea barei trebuie aşezată astfel încât $I_z > I_y$, ca în figura 7.12.

Dimensionarea se face cu relaţia (7.9), care implică cunoaşterea raportului W_z/W_y. Pentru aceasta se calculează momentele de inerţie axiale ale secţiunii barei:


x
6F
D
C
2F
2a
2F
B
z
A
2a
2F
a
y
a)
9t
2t
30t
t
2t
b)

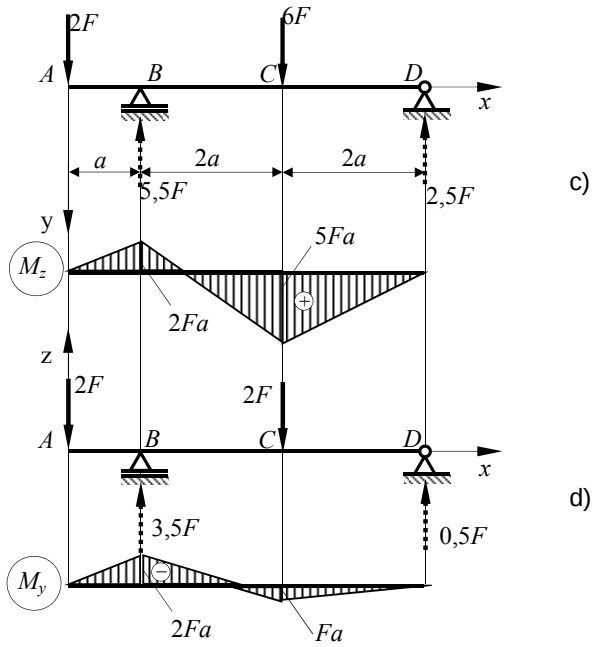

2F
6F
A
B
C
D
x
a
2a
2a
5,5F
2,5F
c)
y
5Fa
M_z
2Fa
z
2F
2F
A
B
C
D
x
d)
3,5F
0,5F
M_y
2Fa
Fa

Fig. 7.11

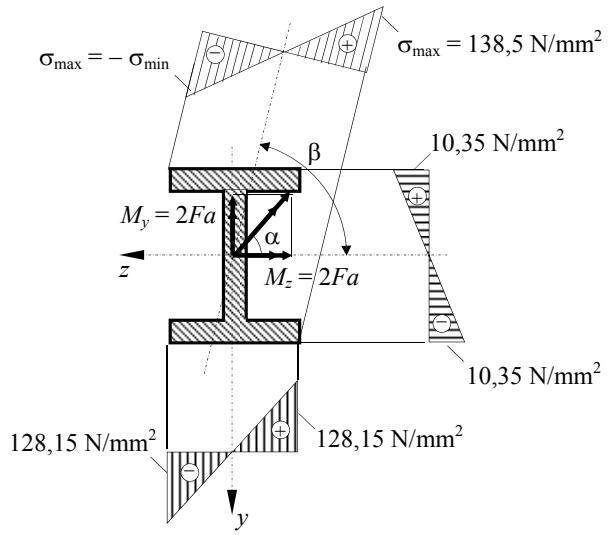


Fig. 7.12.

$$I_z = 2\cdot\left[\frac{9t\cdot(2t)^3}{12} + 9t\cdot 2t\cdot(16t)^2\right] + \frac{t\cdot(30)^3}{12} = 11478t^4;$$

$$I_y = 2\cdot\frac{2t\cdot(9t)^3}{12} + \frac{30t\cdot t^3}{12} = 245{,}5t^4.$$

Deoarece $|y_{\max}| = 17t$ şi $|z_{\max}| = 4{,}5t$ modulele de rezistenţă la încovoiere pentru secţiunea considerată sunt:

$$W_z = \frac{11478t^4}{17t} = 675{,}176t^3; \quad W_y = \frac{245{,}5t^4}{4{,}5t} = 54{,}555t^3;$$

şi deci

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{675{,}176t^3}{54{,}555t^3} = 12{,}376.$$

Aplicând formula (7.9) se obţine:

$$W_z^{nec} = \frac{|M_z|}{\sigma_a}\left(1 + \frac{|M_y|}{|M_z|}\cdot\frac{W_z}{W_y}\right) = \frac{(5\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{150}\left(1 + \frac{1}{5}\cdot 12{,}376\right) = 111{,}2064\cdot 10^3 \text{ mm}.$$

Din egalitatea $W_z^{nec} = W_z^{\dim}$ rezultă:

$$t = \sqrt{\frac{111{,}2064\cdot 10^3}{675{,}176}} = 5{,}48 \text{ mm}.$$

Se adoptă $t = 5{,}5$ şi se face verificarea calculelor:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{|M_z|}{W_z}\left(1 + \frac{|M_y|}{|M_z|}\cdot\frac{W_z}{W_y}\right) = \frac{(5\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{675{,}176\cdot 5{,}5^3}\left(1+\frac{1}{5}\cdot 12{,}376\right) = 148{,}5\ \text{N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Deoarece în secţiunea B:

$$\sigma = \frac{(2\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{675{,}176\cdot 5{,}5^3}\left(1+\frac{2}{2}\cdot 12{,}376\right) = 228{,}62\ \text{N/mm}^2 > \sigma_a;$$

dimensionarea barei se va face cu valorile eforturilor secţionale din secţiunea B:

$$W_z^{nec} = \frac{(2\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{150}\left(1+\frac{2}{2}\cdot 12{,}376\right) = 171{,}2128\cdot 10^3\ \text{mm}^3.$$

Din egalitatea $W_z^{nec} = W_z^{\dim}$ rezultă:

$$t = \sqrt{\frac{171{,}2128\cdot 10^3}{675{,}176}} = 6{,}3\ \text{mm}.$$

Se adoptă $t = 6{,}5$ mm, dimensiune care verifică condiţia de rezistenţă:

$$\sigma_{\max}^{ef} = \frac{(2\cdot 1{,}2\cdot 10^3)\cdot(800)}{675{,}176\cdot 6{,}5^3}\left(1+\frac{2}{2}\cdot 12{,}376\right) = 138{,}5\ \text{N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Distribuţia tensiunilor σ corespunzătoare eforturilor secţionale $M_z = -2Fa$, $M_y = -2Fa$, din secţiunea B, este redată în figura 7.12. Unghiul β pe care îl face axa neutră cu direcţia axei z se calculează cu relaţia (7.4):

$$\tan\beta = \frac{I_z}{I_y}\cdot\tan\alpha = \frac{11478t^4}{245{,}5t^4}\cdot\frac{-2Fa}{-2Fa} = 46{,}753 \Rightarrow \beta = 88^\circ\,46'.$$

P.7.2. Consola din figura 7.13, *a* este confecţionată dintr-un profil cornier cu braţele egale L 150 x 150 x 14. Să se determine $F_{\max}$ pentru orientarea secţiunii barei ca în figura 7.13, *b* şi sporul de sarcină ce se obţine dacă forţa F acţionează după axa cu moment de inerţie minim (fig. 7.13, *c*).

Momentul încovoietor M_i este maxim în încastrare, are valoarea $M_i = -F\cdot l$ şi este dirijat după axa z_1 (fig. 7.13, *b*), care face cu axele centrale principale de inerţie y şi z unghiuri de 45°.

Rezultă $M_z = M_y = -F\cdot l\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -F\cdot 1{,}5\cdot 10^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -1060{,}66\ F$. În consecinţă bara este supusă la încovoiere oblică şi determinarea lui $F_{\max}$ se face în baza condiţiei de rezistenţă (7.6). Din anexa 3, pentru cornier L 150x150x14 se obţin următoarele caracteristici: $I_z = 1340\cdot 10^4$ mm^4; $I_y = 347\cdot 10^4$ mm^4; $y_{S1} = 106$ mm; $z_{S1} = -53{,}1$mm; $z_{S2} = 59{,}5$mm.

Axa neutră face cu axa z unghiul β a cărui valoare este:

$$\tan\beta = \frac{M_y}{M_z}\cdot\frac{I_z}{I_y} = \frac{-1060{,}66F}{-1060{,}66F}\cdot\frac{1340\cdot 10^4}{347\cdot 10^4} = 3{,}86 \Rightarrow \beta = 75^\circ 29'.$$

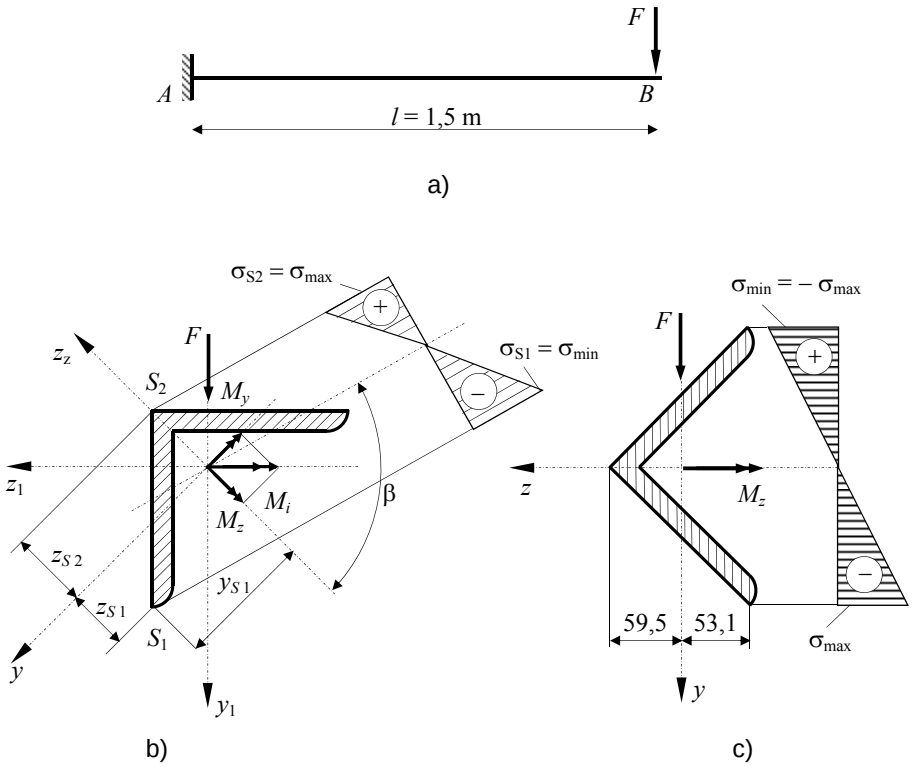


Fig. 7.13

Sensul pozitiv al unghiului β este cel trigonometric.

Se duc paralele la axa neutră, tangente la conturul secțiunii, şi se identifică punctele S_1 şi S_2 care sunt punctele cele mai solicitate. Tensiunile σ din aceste puncte se determină cu relațiile (7.5):

$$\sigma_{S1} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{S1} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{S1} = \frac{-1060.66F}{1340 \cdot 10^4} \cdot 106 - \frac{-1060.66F}{347 \cdot 10^4} \cdot (-53{,}1) = -24{,}62 \cdot 10^{-3} F$$

$$\sigma_{S2} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{S2} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{S2} = -\frac{-1060.66F}{347 \cdot 10^4} \cdot (59{,}5) = 18{,}87 \cdot 10^{-3} F$$

Din condiția de rezistență

$$\sigma_{\max} = \max\,[\,|\,\sigma_{S_1}\,|, |\,\sigma_{S_2}\,|\,] \le \sigma_a.$$

rezultă

$$24{,}62 \cdot 10^{-3} F \le 150 \Rightarrow F_{\max} = 6092{,}6 \text{ N}.$$

Dacă secțiunea este orientată ca în figura 7.13, *c*, atunci bara este supusă la încovoiere simplă şi are momentul capabil:

$$M_z^{cap} = W_z^{ef} \cdot \sigma_a = \frac{1340 \cdot 10^4}{106} \cdot 150 = 18{,}962 \cdot 10^6 \text{ Nmm.}$$

Din condiția $M_z^{\max} = F \cdot l \le M_z^{cap}$ rezultă $\frac{18{,}922 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^3} = 12641{,}5$ N.

Sporul de sarcină ce îl poate prelua bara cu secțiunea transversală așezată ca în figura 7.13, *c* este $\frac{12641{,}5}{6092{,}6} = 2{,}07$.

P.7.3. O bară din fontă cu secțiunea și dimensiunile indicate în figura 7.14 este acționată, prin intermediul unui cablu, de o forță P = 300 kN. Cunoscând că rezistența la întindere din încovoiere a fontei din care este confecționată bara este σ_a^{int} = 45 N/mm^2, iar rezistența la compresiune și compresiune din încovoiere este σ_a^{com} = 120 N/mm^2, să se verifice secțiunea barei.

Sistemul fiind simetric, în secțiunile *A-A* și *B-B*, în dreptul urechilor, se aplică eforturile din cablu datorate forței *P*, a căror mărime este:

$$S = \frac{P}{2 \cdot \cos 60^0} = \frac{300}{2 \cdot \cos 60^0} = 300 \text{ kN.}$$

Reducând eforturile *S* din cablu în axa barei (fig. 7.15, *a*) se obține o forță verticală

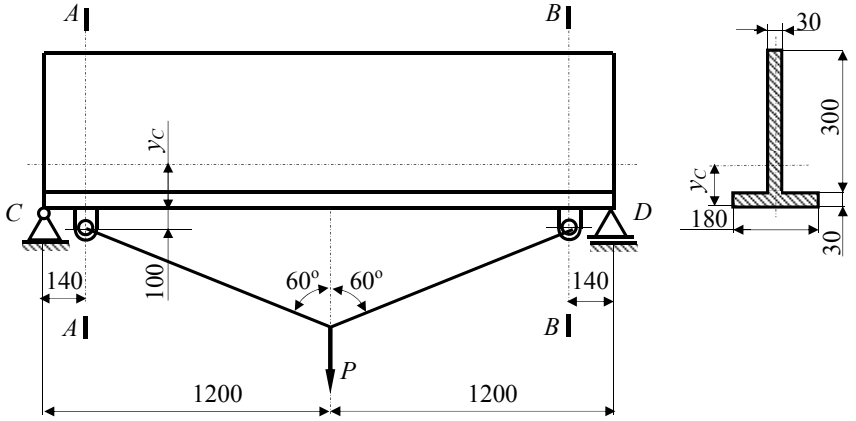


Fig. 7.14

$F_1 = S \cdot \cos 60^o = 300 \cdot \cos 60^o = 150$ kN, o forță orizontală $F_2 = S \cdot \sin 60^o = 300 \cdot \sin 60^o = 259{,}807$ kN și un moment $M = (S \cdot \sin 60^o) \cdot 100 = 25{,}9807$ kNm.

Cu aceste solicitări se trasează diagramele de eforturi N și M_z redate în figura 7.15, *b*. Din analiza lor reiese că secțiunile cele mai solicitate sunt *A* și *B*. În secțiunile A^{st} și B^{dr}, bara este solicitată la încovoiere simplă, valoarea momentului fiind M_z = 21 kNm, iar în secțiunile A^{dr} și B^{st} la încovoiere simplă cu forță axială, valorile eforturilor fiind N = 259,807 kN, M_z = 46,9807 kNm.

Deoarece bara este confecționată din fontă, material care se comportă diferit la întindere și compresiune, pentru verificarea condițiilor de rezistență (3.67) și (7.16) este necesară trasarea variației tensiunilor σ pe secțiune.

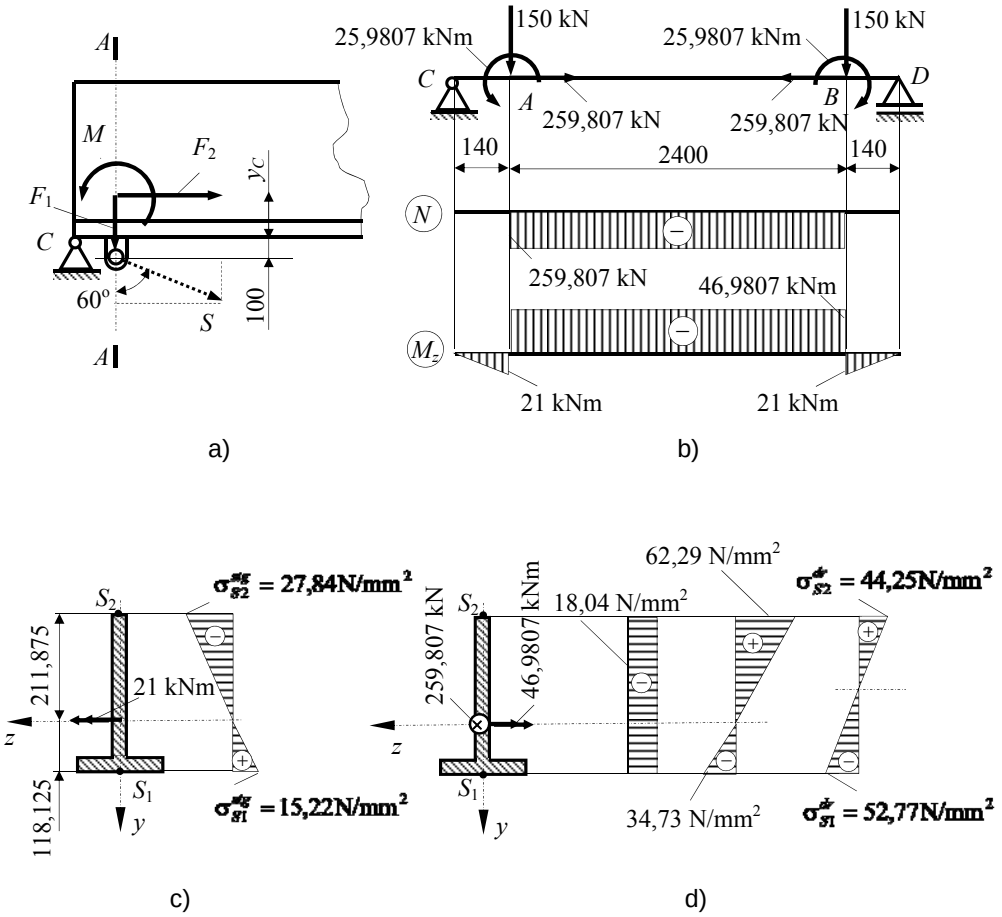


Fig. 7.15.

Pentru aceasta este necesar să se determine mai întâi poziția centrului de greutate al secțiunii:

$$y_C = \frac{15 \cdot 30 \cdot 180 + (30 + 150) \cdot 30 \cdot 300}{30 \cdot 180 + 30 \cdot 300} = 118{,}125 \text{ mm}.$$

Cunoscând poziția centrului de greutate se poate calcula momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa z:

$$I_z = \frac{30^3 \cdot 180}{12} + 30 \cdot 180 \cdot (118{,}125 - 15)^2 +$$

$$+ \frac{300^3 \cdot 30}{12} + 300 \cdot 30 \cdot (180 - 118{,}125)^2 = 159{,}789 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

În figura 7.15, *c* este redată variația tensiunii σ în secțiunile A^{st} şi B^{dr}. Valorile maxime se ating în punctele S_1 şi S_2:

$$\sigma_{S1} = \frac{21 \cdot 10^6}{159{,}789 \cdot 10^6} \cdot 118{,}125 = 15{,}52 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S2} = \frac{21 \cdot 10^6}{159{,}789 \cdot 10^6} \cdot (-211{,}875) = -27{,}84 \text{ N/mm}^2.$$

Condiția de rezistență în secțiunile A^{st} şi B^{dr} este îndeplinită deoarece:

$$\sigma_{S1} = 15{,}52 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a^{\text{int}} = 45 \text{ N/mm}^2;$$

$$|\sigma_{S2}| = 27{,}84 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a^{\text{comp}} = 120 \text{ N/mm}^2$$

În figura 7.15, *d* este redată variația tensiuni σ în secțiunile A^{dr} şi B^{st}. Valorile maxime sunt:

$$\sigma_{S1} = \frac{-259{,}807 \cdot 10^3}{14{,}4 \cdot 10^3} + \frac{-46{,}9807 \cdot 10^6}{159{,}789 \cdot 10^6} \cdot 118{,}125 = -18{,}04 - 34{,}73 = -52{,}77 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S2} = \frac{-259{,}807 \cdot 10^3}{14{,}4 \cdot 10^3} + \frac{-46{,}9807 \cdot 10^6}{159{,}789 \cdot 10^6} \cdot (-211{,}875) = -18{,}04 + 62{,}29 = 44{,}25 \text{ N/mm}^2.$$

Pentru că şi în secțiunile A^{st} şi B^{dr} :

$$|\sigma_{S1}| = 52{,}77 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a^{\text{comp}} = 120 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{S2} = 44{,}25 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a^{\text{int}} = 45 \text{ N/mm}^2$$

rezultă că bara este dimensionată corect, condițiile de rezistență verificându-se în toate secțiunile periculoase.

P.7.4. Să se determine valoarea maximă a tensiunii ce se produce la baza unei fundații, ştiind că aceasta are o greutate $Q = 150$ kN, iar forța $P = 130$ kN o solicită excentric pe axa *Oz* la distanța $e = -0{,}45$ m (fig. 7. 16). Dimensiunile secțiunii transversale a fundației sunt b x h = 2 x 1 m.

Forța *P* se reduce în centrul de greutate al secțiunii la o forță axială de compresiune $N^P = P$ şi la un moment încovoietor dirijat după axa *Oy* a cărui valoare este $M_y = -P \cdot e$. Greutatea *Q* se reduce numai la o forță axială de compresiune $N^Q = P$.

Tensiunea normală maximă de compresiune se produce în punctele situate pe muchia *BC*. Ea se compune din tensiunea normală de compresiune produsă de $N = N^P + N^Q = P + Q$ şi din cea de încovoiere produsă de momentul $M_y = -P \cdot e$ şi are valoarea:

$$\sigma_B = -\frac{Q+P}{A} - \frac{P \cdot e}{W_y} = -\frac{150+130}{2 \cdot 1} - \frac{130 \cdot 0{,}45}{\frac{2^2 \cdot 1}{6}} = 227{,}75 \text{ kN/m}^2 = 0{,}22775 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea normală în punctele situate pe muchia *AD* este egală cu:

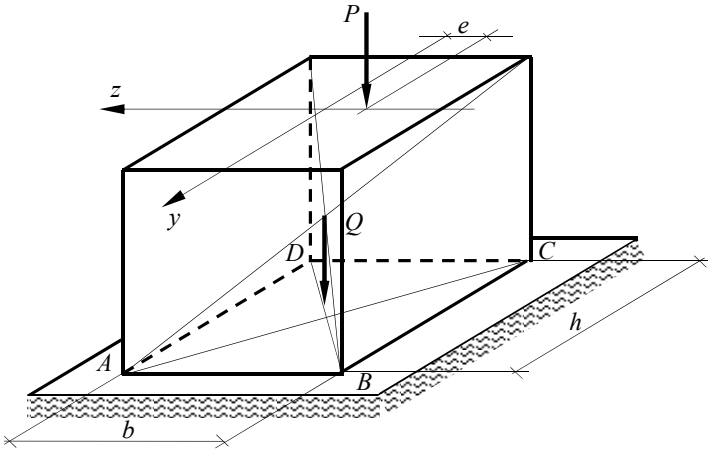


Fig. 7.16.

$$\sigma_B = -\frac{Q+P}{A} - \frac{P \cdot e}{W_y} = -\frac{150+130}{2 \cdot 1} + \frac{130 \cdot 0{,}45}{\frac{2^2 \cdot 1}{6}} = 52{,}15 \text{ kN/m}^2 = 0{,}5215 \text{ N/mm}^2.$$

Se constată că pe secţiunea fundaţiei se dezvoltă numai tensiuni de compresiune. Acest lucru poate fi verificat şi prin faptul că punctul de aplicaţie al forţei excentrice $\vec{N}$:

$$z_0 = \frac{M_y}{N} = \frac{P \cdot e}{P+Q} = \frac{130 \cdot 0{,}45}{130+150} = 0{,}208 \text{ m},$$

este situat în treimea mijlocie a secţiunii fundaţiei deoarece $z_0 = 0{,}208$ m $< \frac{b}{6} = 0{,}33$ m.

P.7.5. Grinda din figura 7.17, *a* cu dimensiunile şi forţele indicate, se realizează din două profile U 30 (a = 1m; σ_a = 150 N/mm^2). Să se determine valoarea maximă a forţei F pe care o poate suporta grinda şi să se traseze distribuţia tensiunilor σ în secţiunea D.

Se consideră grinda în planul (x, y) figura 7.17, *b*, acţionată de sarcinile transversale din acest plan şi de sarcina axială. Diagrama N este reprezentată în figura 7. 17, *c*. Se determină reacţiunile verticale din C şi G şi se trasează diagrama M_z (fig. 7.17, *d*).

Se consideră grinda în planul (x, z) (axa z este orientată în sus pentru a păstra convenţia de reprezentare a momentului încovoietor de partea fibrei întinse) figura 7.17, *e*, acţionată de sarcinile transversale din acest plan. După determinarea reacţiunilor se trasează diagrama M_z, reprezentată în figura 7.17, *f*.

Secţiunea cea mai solicitată este cea din D, eforturile din această secţiune având valorile $N = 10Fa$, $M_z = 5Fa$ şi $M_y = 2{,}5Fa$.

Din anexa 6, pentru U30 se obţin următoarele caracteristici: $I_{z1} = 8030 \cdot 10^4$ mm^4, $I_{y1} = 495 \cdot 10^4$ mm^4, $A_1 = 58{,}8 \cdot 10^2$ mm^2. Pentru secţiunea compusă a barei caracteristicile geometrice sunt:

$$I_z = 2I_{z1} = 2 \cdot 8030 \cdot 10^4 = 160{,}6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4; \quad W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{160{,}6 \cdot 10^6}{150} = 1{,}07067 \cdot 10^6 \text{ mm}^3;$$

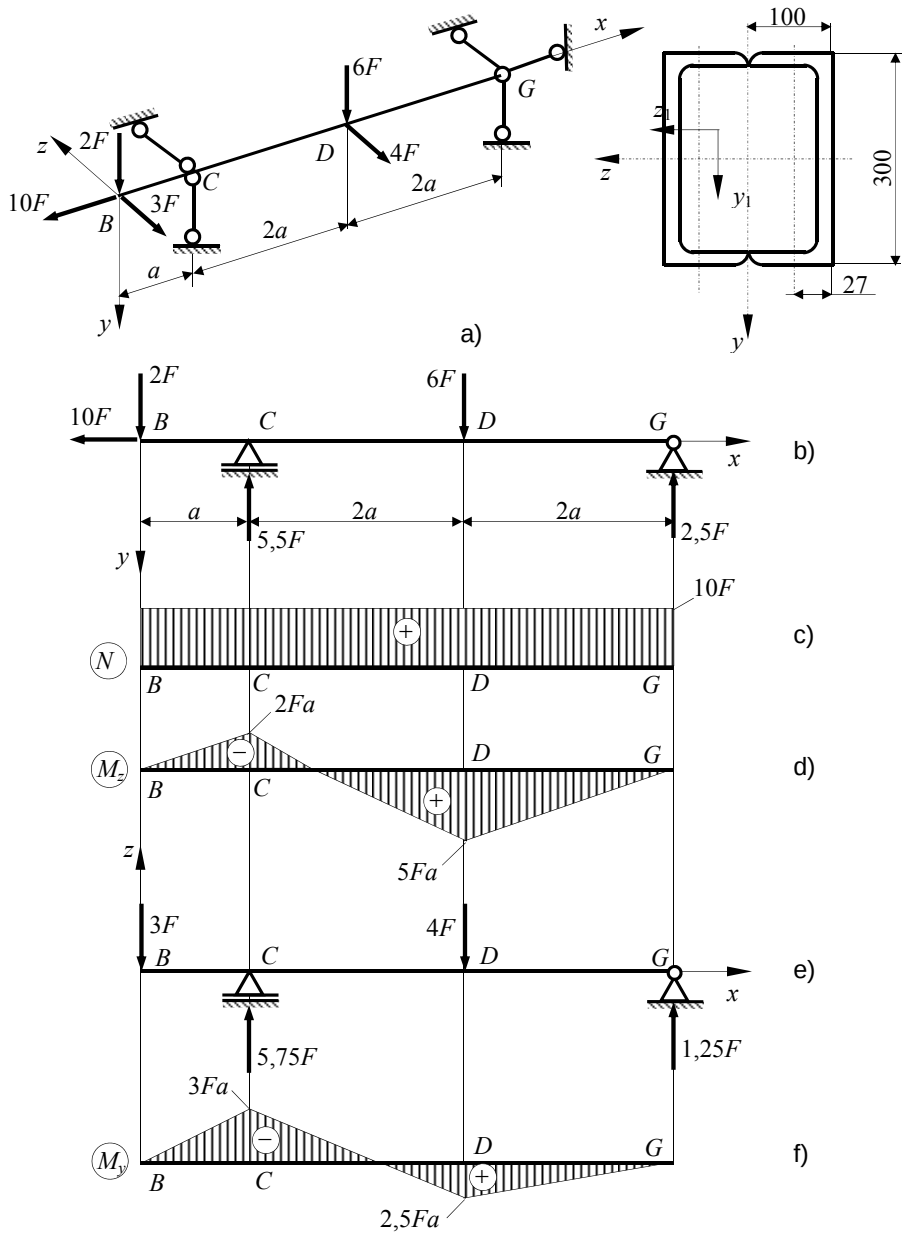

a)
b)
c)
d)
e)
f)
2F
6F
10F
B
C
D
G
x
y
z
a
2a
5,5F
2,5F
N
2Fa
5Fa
3F
4F
5,75F
1,25F
3Fa
2,5Fa
100
300
27

Fig. 7.17.

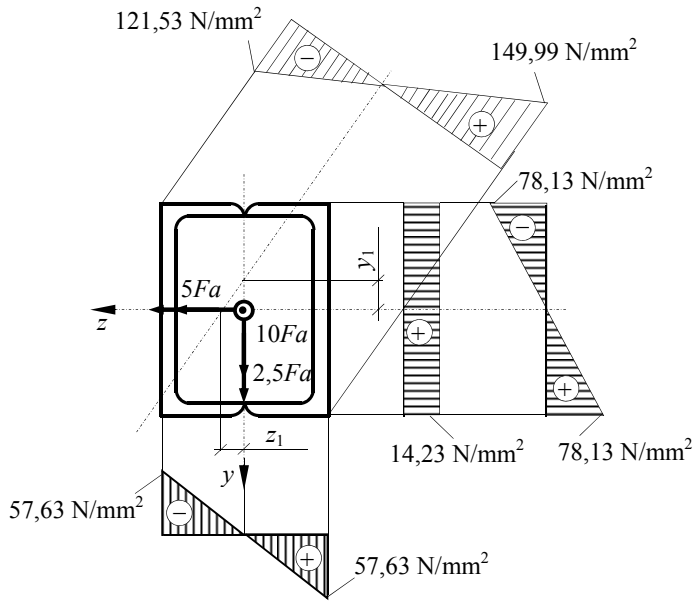


Fig. 7.18

$I_y = 2(I_{y1} + A_1 \cdot d_{yy1}^2) = 2\cdot[\,945\cdot 10^4 + 58{,}8\cdot 10^2\cdot(100-27)^2] = 72{,}56904\cdot 10^6$ mm^4;

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|} = \frac{72{,}56904\cdot 10^6}{100} = 72{,}56904\cdot 10^4 \text{ mm}^3;$$

$A = 2A_1 = 2\cdot 58{,}8\cdot 10^2 = 11{,}76\cdot 10^2$ mm^2.

Deoarece secțiunea barei se încadrează în categoria secțiunilor cu colțuri pline, din condiția de rezistență (7.27) se determină valoarea maximă a forței F:

$$\sigma_{\max} = \frac{10F}{11{,}76\cdot 10^3} + \frac{5F\cdot 10^3}{1{,}07067\cdot 10^6} + \frac{2{,}5F\cdot 10^3}{72{,}56904\cdot 10^4} \le 150 \Rightarrow 8{,}9653\cdot 10^{-3}F \le 150$$

Rezultă $F_{\max} = 16{,}73$ kN. Cu această valoare se verifică şi secțiunea C:

$$\sigma_C = \frac{10\cdot(16{,}73\cdot 10^3)}{11{,}76\cdot 10^3} + \frac{2\cdot(16{,}73\cdot 10^3)\cdot 10^3}{1{,}07067\cdot 10^6} + \frac{3\cdot(16{,}73\cdot 10^3)\cdot 10^3}{72{,}56904\cdot 10^4} = 114{,}64 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Distribuția tensiunilor σ corespunzătoare secțiunii D este redată în figura 7.18. Tăieturile axei centrale, calculate cu relațiile (7.22) sunt $y_1 = -27{,}3$ mm şi $z_1 = 24{,}6$ mm.

P.7.6. Pe un arbore sunt montate două roți de raze R_1 şi R_2, acționate la periferie de forțele T_1 şi T_2 (fig. 7.19, *a*). Arborele are secțiune circulară plină şi transmite o putere $P = 28$ kW la turația $n = 400$ rot/min. Să se dimensioneze arborele, după ipoteze a III- a de rezistență ştiind că oțelul din care este confecționat are $\sigma_a = 80$ N/mm^2, G = 8,077·10^4 N/mm^2, iar răsucirea specifică admisibilă este $(d\varphi/dx)_a = (1/3)$ $^o/_m$.

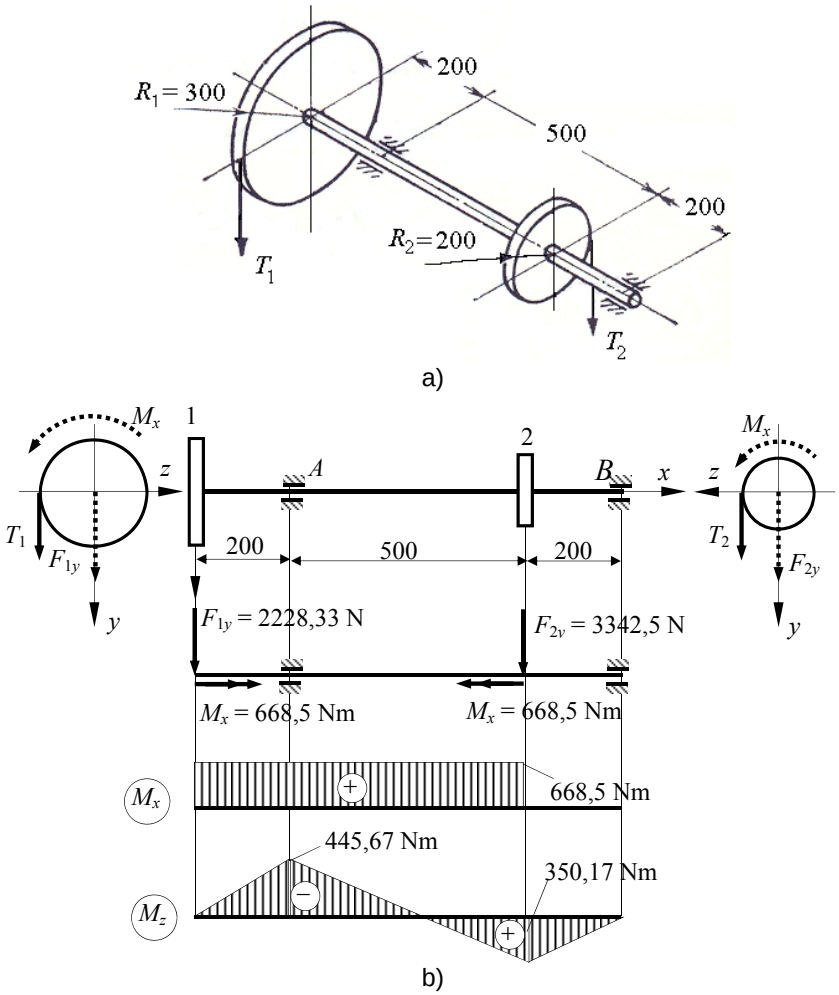


Fig.7.19.

Forțele care acționează roțile 1 şi 2 se reduc în axa arborelui la forțele F_{1y}, respectiv F_{2y} şi la un moment de torsiune M_x (fig. 7.19, *b*), a cărui valoare este:

$$M_x = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{P}{n} = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{28}{400} = 668{,}5 \text{ Nm}$$

Diagrama momentului de torsiune M_x este redată în figura 7.19,*b*.
Forțele F_{1y} şi F_{2y} se determină astfel:

$$F_{1y} = T_1 = \frac{M_x}{R_1} = \frac{668{,}5 \cdot 10^3}{300} = 2228{,}33 \text{ N};$$

$$F_{2y} = T_2 = \frac{M_x}{R_2} = \frac{668{,}5 \cdot 10^3}{200} = 3342{,}5\ \text{N}.$$

Cu aceste valori s-a trasat diagrama momentului de încovoiere M_z în figura 7.19, *b*.

Între cele două roți, arborele fiind solicitat la încovoiere cu torsiune, calculul de proiectare se face cu relația (7.32) în care:

$$K_{T\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_x}{M_i^{\max}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{668{,}5}{445{,}67}\right)^2} = 1{,}803\ ,$$

deoarece momentul de încovoiere maxim este în secțiunea *A* şi are valoarea:

$$M_i^A = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{445{,}67^2 + 0} = 445{,}67\ \text{Nm} = M_i^{\max}.$$

Rezultă:

$$W_i^{\text{nec}} = \frac{M_i^{\max}}{\sigma_a} K_{T\tau} = \frac{445{,}67 \cdot 10^3}{80} \cdot 1{,}803 = 10{,}044 \cdot 10^3\ \text{mm}^3.$$

Deoarece secțiunea arborelui este circulară $W_i^{\dim} = \dfrac{\pi d^3}{32}$ şi deci;

$$d = \sqrt[3]{\frac{10{,}044 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi}} = 46{,}77\ \text{mm}.$$

Se adoptă $d = 47$ mm şi se verifică exactitatea calculelor:

$$\sigma_{\max}^{\text{ef}} = \frac{445{,}67 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 47^3} \cdot 1{,}803 = 78{,}8\ \text{N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Verificarea condiției de rigiditate la torsiune se face cu relația (3.114):

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{M_x}{GI_p} = \frac{668{,}5 \cdot 10^3}{(8{,}077 \cdot 10^4)\left(\dfrac{\pi \cdot 47^4}{32}\right)} = 17{,}28 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/mm} >$$

$$> \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{10^3} = 5{,}82 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/mm}.$$

Deoarece condiția de rigiditate nu este îndeplinită, dimensionarea se face cu relația (7.33):

$$I_p^{\text{nec}} = \frac{668{,}5 \cdot 10^3}{(8{,}077 \cdot 10^4)(5{,}82 \cdot 10^{-6})} = 1{,}4421 \cdot 10^6 = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{1{,}4421 \cdot 10^6 \cdot 32}{\pi}} = 61{,}7\ \text{mm}$$

Se adoptă $d = 62$ mm.

P.7.7. Arborele din figura 7.20 transmite puterea P = 30 kW la turația n = 250 rot/min. Raportul eforturilor din ramura conducătoare şi ramura condusă a fiecărei curele de transmisie este 2. Razele roților sunt: R_1 = 400 mm, R_2 = 500 mm. Să se dimensioneze arborele cu secțiune circulară după T_τ (σ_a = 70 N/mm^2).

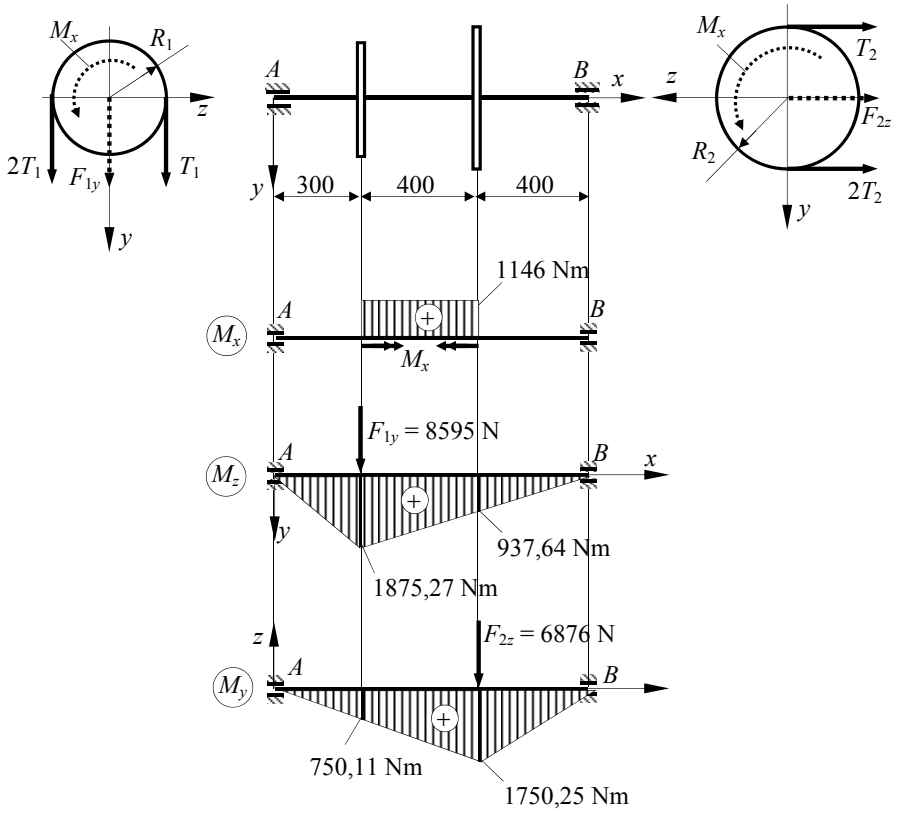


Fig. 7.20

Momentul de torsiune transmis de arbore este:

$$M_x = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{P}{n} = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{30}{250} = 1146\,\text{Nm},$$

şi el se manifestă pe porțiunea cuprinsă între cele două roți (fig. 7.20)

Reducând, în axa arborelui, eforturile din ramurile curelelor, se obțin forțele (fig. 7.20):

$$F_{1y} = 3T_1 = 3\frac{M_x}{R_1} = 3 \cdot \frac{1146 \cdot 10^3}{400} = 8595\,\text{N};$$

$$F_{2z} = 3T_2 = 3\frac{M_x}{R_2} = 3 \cdot \frac{1146 \cdot 10^3}{500} = 6876\,\text{N};$$

deoarece între eforturile din ramurile curelelor şi momentul M_x existe egalităţile:

$$M_x = 2T_1R_1 - T_1R_1 = T_1R_1;$$
$$M_x = 2T_2R_2 - T_2R_2 = T_2R_2.$$

Cele două forţe acţionând în plane diferite vor produce momente de încovoiere atât în planul cu normala z (M_z), cât şi în planul cu normala y (M_y). Pe baza diagramelor de eforturi (fig. 7.20) se stabileşte secţiunea în care momentul total de încovoiere este maxim:

$$M_i^1 = \sqrt{1875{,}27^2 + 750{,}11^2} = 2019{,}73 \text{ Nm};$$

$$M_i^2 = \sqrt{937{,}64^2 + 1750{,}25^2} = 1985{,}58 \text{ Nm}.$$

Secţiunea periculoasă este în dreptul roţii 1 deoarece în această secţiune atât momentul încovoietor cât şi momentul de torsiune au valorile maxime.

Deoarece pe tronsonul dintre cele două roţi arborele este solicitat la încovoiere cu torsiune, calculul de proiectare se face cu relaţia (7.32) în care:

$$K_{T\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_x}{M_i^{\max}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1146}{2019{,}73}\right)^2} = 1{,}1497 .$$

Rezultă:

$$W_i^{\text{nec}} = \frac{M_i^{\max}}{\sigma_a} K_{T\tau} = \frac{2019{,}73 \cdot 10^3}{70} \cdot 1{,}1497 = 33{,}174 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Secţiunea arborelui fiind circulară $W_i^{\dim} = \dfrac{\pi d^3}{32}$ şi deci;

$$d = \sqrt[3]{\frac{33{,}174 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi}} = 69{,}65 \text{ mm}.$$

Se adoptă $d = 70$ mm şi se verifică exactitatea calculelor:

$$\sigma_{\max}^{\text{ef}} = \frac{2019{,}73 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 70^3} \cdot 1{,}1497 = 68{,}95 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a.$$

Probleme suplimentare

P.7.8. Un stâlp de fontă de înălţime mică, având secţiunea pătrată, este solicitat de două forţe concentrate ca în figura 7.21. Cunoscând valorile tensiunilor admisibile ale fontei $\sigma_a^{\text{int}} = 45$ N/mm^2 şi $\sigma_a^{com} = 120$ N/mm^2, să se dimensioneze acest stâlp.

P.7.9. O consola de lungime $l = 2$m este solicitată în capătul liber de două forţe transversale F şi de o forţă axială $5F$ ca în figura 7.22. Ştiind ca secţiunea barei este un profil I 30 şi că materialul din care este confecţionată are tensiunea admisibilă $\sigma_a = 150$ N\mm^2, să se determine intensitatea maximă a forţei F pe care bara o poate suporta.

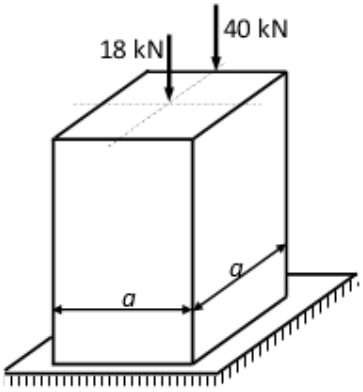


Fig. 7.21.

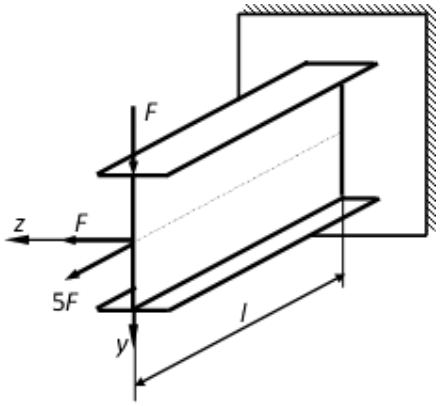


Fig. 7.22.

P.7.10. Pe un arbore sunt montate două roți de curea. Raportul eforturilor din ramura conducătoare şi ramura condusă a fiecărei curele de transmisie este indicat în figura 7. 23. Să se dimensioneze arborele după T_τ, dacă transmite puterea P = 46 kW la o turație de 420 rot/min, iar σ_a = 80 N\mm^2.

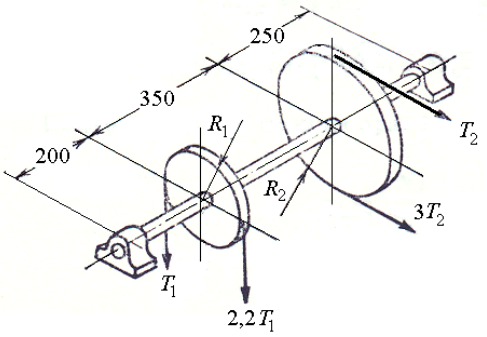


Fig. 7.23.

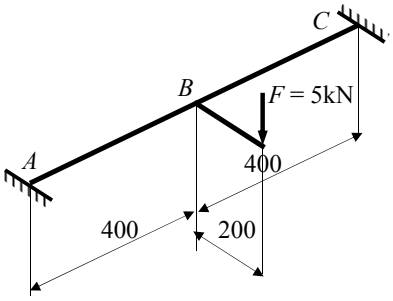


Fig. 7.24.

P.7.11. Sistemul de bare din figura 7. 24, încastrat în *A* şi *C*, este acționat de forța *F* = 5kN. Să se dimensioneze bara *ABC* ştiind că are secțiune circulară (σ_a = 100 N\mm^2).

8. FLAMBAJUL BARELOR DREPTE

S-a arătat până acum că în teoria de ordinul I sau teoria lineară a structurilor, bazată pe ipoteza micilor deplasări şi legea lui Hooke, ecuaţiile de echilibru static se scriu pe forma nedeformată a structurii, fapt ce permite aplicarea principiului suprapunerii efectelor ca o consecinţă a dependenţei liniare dintre tensiuni şi deplasările provocate de solicitări.

Forma deformată a unei structuri sub sarcinile exterioare este denumită *forma de echilibru elastic*.

Flambajul (pierderea de stabilitate) constituie trecerea formei deformate a unei structuri dintr-o poziţie de echilibru stabil într-o poziţie de echilibru instabil. Astfel o bară poate trece într-o poziţie de echilibru instabil daca forţa P este mai mare decât o valoare P_{cr} (fig. 8.1). Sarcina la care se produce această trecere se numeşte *sarcină critică* (*sarcină de flambaj*)

Pentru a analiza natura echilibrului formei deformate a unei structuri trebuie cercetată comportarea acesteia la deformări vecine formei de echilibru elastic. Acest fapt implică necesitatea scrierii ecuaţiilor de echilibru pe forma deformată ceea are drept consecinţă imposibilitatea aplicării principiului suprapunerii efectelor.

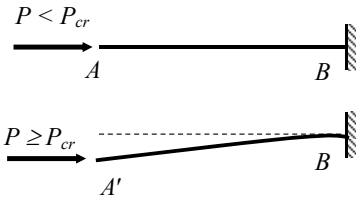


Fig. 8.1.

Deoarece calculul tensiunilor şi deplasărilor se face prin scrierea ecuaţiilor de echilibru pe forma deformată a sistemului, acest calcul este un *calcul neliniar* (calcul în teoria de ordinul II).

Flambajul barei drepte sub acţiunea unei forţe axiale de compresiune se numeşte *flambaj pur*. In această situaţie trebuie calculată forţa maximă $P_{\max}$ care faţă de forţa critică P_{cr} să conducă la un coeficient de flambaj:

$$c_f = \frac{P_{cr}}{P_{\max}} > 1 . \tag{8.1}$$

Mărimea coeficientul de siguranță la flambaj c_f se stabileşte prin standarde în funcție de condițiile de exploatare, materialul folosit şi importanța pieselor care prezintă riscul de pierdere a stabilității.

8.1. FLAMBAJUL BAREI DREPTE SOLICITATE LA COMPRESIUNE

Se consideră bara *AB* din figura 8.2, *a* articulată în *A* şi simplu rezemată în *B*, solicitată la o forță axială de compresiune *P*. Dacă forța $P = P_{cr}$ atunci bara îşi pierde stabilitatea şi trece în poziția deformată prezentată în figura 8.2, *b*. Această formă deformată este descrisă de ecuația fibrei medii deformate:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI} \tag{8.2}$$

în care *v* reprezintă săgeata din secțiunea curentă *i*; *M* – momentul încovoietor din secțiunea *i*; *E* – modulul de elasticitate lungitudinal al materialului barei; *I* -

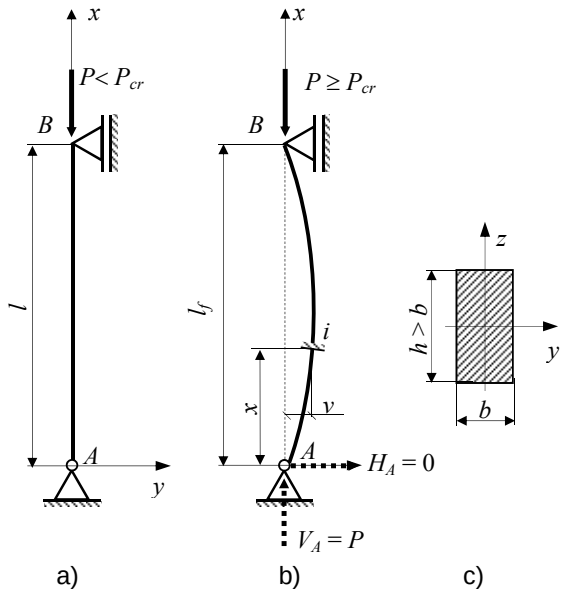


Fig. 8.2.

momentul de inerţie al secţiunii barei în raport cu o axă perpendiculară pe planul în care bara s-a deformat (în cazul studiat I_z – de fapt flambajul poartă numele acestei axe).

In secţiunea *i*, reducând forţele din urmă pe forma deformată (fig. 8.2, *b*) se poate constata ca momentul încovoietor *M* are valoarea:

$$M = P \cdot v \,. \tag{8.3}$$

Dacă se înlocuieşte valoarea lui *M* dată de (8.3) în relaţia (8.2) şi se notează

$$k^2 = \frac{P}{EI}\,, \tag{8.4}$$

aceasta devine:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + k^2 v = 0\,. \tag{8.5}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi omogenă (5.5) este:

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx\,. \tag{8.6}$$

Funcţia $v(x)$, care reprezintă forma deformată de flambaj, trebuie să satisfacă condiţiile: pentru $x = 0$, $v = 0$ şi pentru $x = l$, $v = 0$. Din prima condiţie rezultă $C_2 = 0$, iar din a doua $C_1 \sin kl = 0$, care conduce la :

$$\sin kl = 0, \tag{8.7}$$

Soluţia $C_1 = 0$ nu convine deoarece în acest caz bara nu ar prezenta forma deformată.

Ecuaţia (8.7) poartă numele de ecuaţie de stabilitate şi are soluţiile:

$$kl = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ ...,\ n\pi. \tag{8.8}$$

Soluţia $kl = 0$ se va elimina deoarece ea conduce la situaţia $P = 0$ în baza relaţiei (8.4). Celelalte soluţii conduc la următoarele valori ale forţei *P* la care se produce flambajul barei studiate:

$$P_{1f} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI;\quad P_{1f} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 EI;\ \ ...\ ;\ P_{1f} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EI\,. \tag{8.9}$$

Pe baza acestor valori se obţin deformatele proprii de flambaj:

$$v_1 = C_{11} \sin\frac{\pi}{l}x\,;\ \ v_2 = C_{12} \sin\frac{2\pi}{l}x\,;\ ...\ ;\ v_n = C_{1n} \sin\frac{n\pi}{l}x\,. \tag{8.10}$$

care sunt sinusoide cu una, două sau *n* semiunde. Aceste deformate care depind de un parametru C_{1i} nedeterminat, constituie forme de echilibru indiferent.

Dacă se defineşte lungimea dintre două puncte succesive de inflexiune ale formei deformate de flambaj, ca lungime de flambaj l_f, atunci totalitatea sarcinilor de flambaj (8.9) se exprimă prin formula generală:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} \tag{8.11}$$

în care l_f ia valorile: $l_{1f} = l$; $l_{2f} = \frac{l}{2}$; ... ; $l_{2f} = \frac{l}{n}$.

Din mulțimea de forțe de flambaj ne interesează forța cu valoarea cea mai mică. Aceasta se obține atunci când numitorul fracției (8.11) are valoarea cea mai mare, adică forța minimă corespunde lungimii maxime de flambaj.

Dacă se considera că bara are legături identice în planele principale de inerție, atunci flambajul se va produce după direcția principală de inerție după care momentul de inerție principal este minim (în cazul considerat după axa O_z, fig. 8.2, *c*). Rezultă că forța critică la care bara studiată flambează este:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_f^2}. \tag{8.12}$$

Relația (8.12) este denumită *formula lui Euler*.

8.1.1. Lungimi de flambaj

Deoarece deformata de flambaj este o sinusoidă lungimile de flambaj corespunzătoare unor bare ce prezintă legături ideale se pot determina astfel: pe o sinusoidă indefinită se plasează forma deformată de flambaj a barei, compatibilă cu legăturile reale ale acesteia; distanța dintre două puncte succesive de inflexiune reprezintă lungimea de flambaj. Astfel, la cazul *b*) din figura 8.3, ştiind că punctul B' este un punct de inflexiune, se duce simetricul C' şi lungimea semiundei $C'AB'$ reprezintă lungimea de flambaj $l_f = 2l$ a consolei AB. În cazul din *d*) din figura 8.3, se observă că punctele C, D de inflexiune ale deformatei de flambaj, sunt extremitățile unei semiunde şi determină lungimea de flambaj $l_f = 0{,}5l$.

În cazul *e*) din figura 8.3, în care încastrarea B se poate deplasa liber pe orizontală, deformata posibilă este AB', iar semiunda sinusoidei de flambaj porțiunea $C'AD'$; rezultă $l_f = l$.

Lungimea de flambaj pentru cazul *c*) (fig. 8.3) este $l_f = 0{,}7l$ şi s-a determinat folosind ecuația fibrei medii deformate a barei comprimate şi încovoiate.

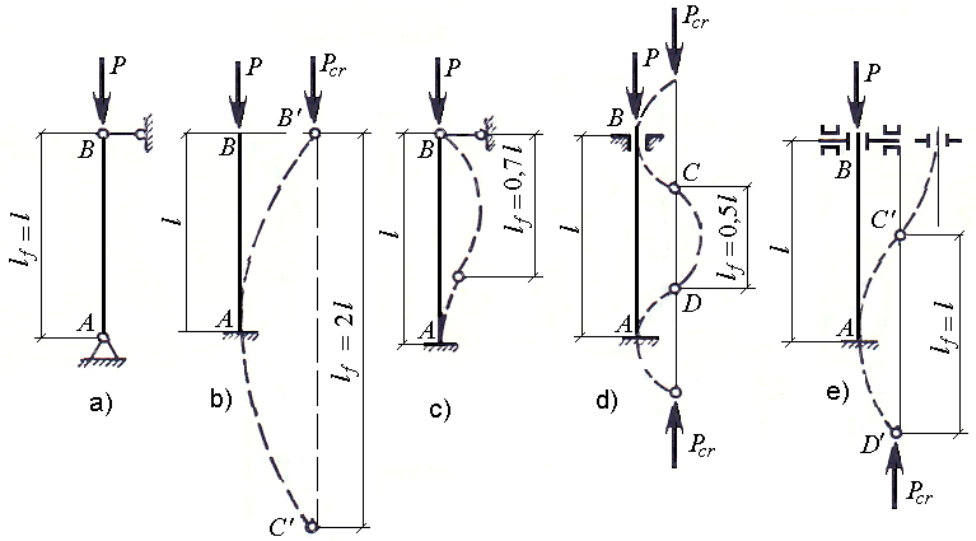


Fig. 8.3.

8.1.2. Limita de valabilitate a formulei lui Euler

Existența lui E în relația (8.12) presupune utilizarea legii lui Hooke $\sigma = E\varepsilon$, ceea ce arată că formula lui Euler este valabilă numai în domeniul deformațiilor elastice ale materialului barei.

Deoarece bara este supusă la compresiune, într-un punct din interiorul său, în situația critică, se dezvoltă tensiunea:

$$\sigma_{cr,f} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_f^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{8.13}$$

unde:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} \tag{8.14}$$

reprezintă *coeficientul de zveltețe* (sau *coeficientul de subțirime*) al barei, iar $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ este raza de girație (de inerție) minimă a secțiunii barei după axa față de care care flambează bara.

Relația între σ_f şi λ, reprezentată de formula (8.13), este o hiperbolă, *numită hiperbola lui Euler*, redată în figura 8.4. Pe această curbă se poate marca punctul B, având ca ordonată limita de proporționalitate σ_p. Deoarece, aşa cum s-a arătat,

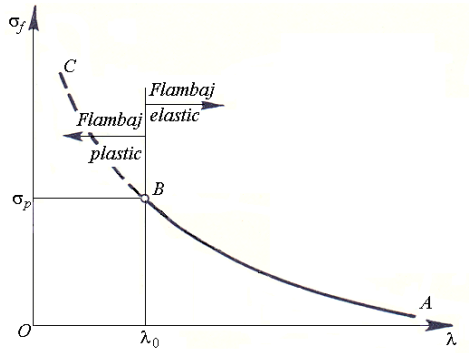


Fig. 8.4.

formula (8.13) s-a stabilit pe baza unor relaţii care admit legea lui Hooke, înseamnă că ea este valabilă cât timp $\sigma_{cr,f} \leq \sigma_p$, respectiv $\lambda \geq \lambda_0$. Pentru $\lambda < \lambda_0$, adică $\sigma_{cr,f} > \sigma_p$, în bară se produc defor-maţii plastice, ceea ce face ca formula lui Euler să nu mai fie valabilă.

În consecinţă punctul *B*, respectiv abscisa λ_0, împarte domeniul de variaţie al lui λ în două părţi:

– zona flambajului elastic, când $\sigma_{cr,f} \leq \sigma_p$, respectiv $\lambda \geq \lambda_0$;

– zona flambajului plastic, când $\lambda < \lambda_0$, adică $\sigma_{cr,f} > \sigma_p$.

Limita de valabilitate este impusă de condiţia ca deformarea barei să se producă în domeniul deformaţiilor elastice, adică:

$$\sigma_{cr,f} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} \leq \sigma_p \Rightarrow \lambda_0 \geq \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \tag{8.15}$$

unde σ_p este limita de proporţionalitate a materialului, iar λ_0 o caracteristică elastică a materialului.

Pentru materialele mai des utilizate λ_0 are următoarele valori:

- oţel de construcţii (S235): $\lambda_0 = 105$;
- lemn: $\lambda_0 = 100$;
- fontă: $\lambda_0 = 80$;
- oţeluri superioare $\lambda_0 = 80 \ldots 100$.

8.1.3. Flambajul barei drepte comprimate în domeniul deformaţiilor permanente

În cazul barelor mai puţin zvelte, dublarea formei de echilibru, în situaţia critică, se produce cu apariţia deformaţiilor permanente în fibrele de la intradosul barei, restul fibrelor urmând a se deforma elastic (fig. 8.5).

În cazul materialelor tenace, cu cât λ scade, palstificarea cuprinde majoritatea până la totalitatea fibrelor barei. Rezultă că în cazul materialelor tenace pentru $\lambda \geq \lambda_0$ toate fibrele barei se deformează elastic, pentru $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$ bara flambează

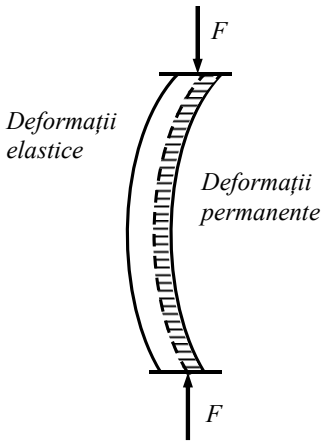


Fig. 8.5.

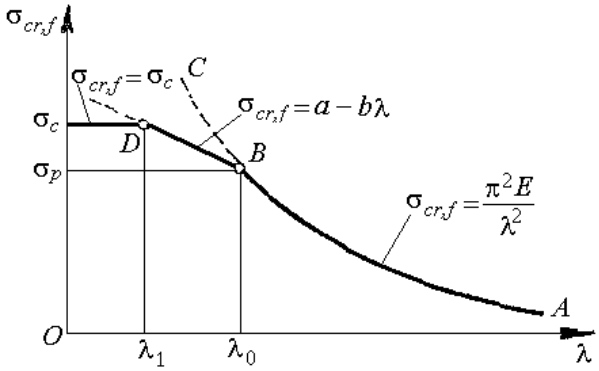


Fig. 8.6.

în domeniul elasto-plastic, iar pentru $\lambda < \lambda_1$ bara cedează prin pierderea capacității de rezistență.

Determinarea funcției $\sigma_{cr,f} = f(\lambda)$ în domeniul deformațiilor permanente a fost făcută, pe cale empirică utilizând rezultatele unor serii de experiențe, de către Tetmajer şi Iasinski, care au propus o relație de forma:

$$\sigma_{cr,f} = a - b\lambda . \tag{8.16}$$

unde a, b sunt constante determinate experimental.

Relația (8.16) este valabilă pentru oțeluri şi lemn în domeniul (λ_1, λ_0), λ_1 fiind determinat, de asemenea experimental.

Tabelul 8.1.

Materialul	a	b	λ_1	λ_0
S235 (R_e = 240 N/mm^2)	304	1,12	60	105
Oțel R_m = 480 N/mm^2; R_e = 310 N/mm^2	460	2,57	60	100
Oțel R_m = 520 N/mm^2; R_e = 360 N/mm^2	577	3,74	60	100
Oțel cu 5% nichel	461	2,25	0	86
Oțel crom-molibden	980	5,30	0	55
Duraluminiu	372	2,14	0	50
Lemn	28,7	0,19	0	100

Tabelul 8.2.

Piesa		c_f
Tija pistonului	Maşini cu un cilindru	8 – 12
	Maşini cu un cilindru şi contratijă: maşini cu doi cilindrii	4 – 8
Biela	Maşini termice mari	14 – 28
	Motoare de automobil	4 – 5,5

Când $\lambda < \lambda_1$ atunci $\sigma_{cr,f} = R_{p0,2}$, unde $R_{p0,2}$ reprezintă limita de curgere aparentă a materialului.

În figura 8.6 este redată variația $\sigma_{cr,f} = f(\lambda)$ pentru materiale tenace, pe cele trei domenii, graficul din această figură purtând numele de *diagrama caracteristică la flambaj*, pe baza căreia se efectuează calculul practic la flambaj.

Coeficienții *a* şi *b* variază de la un material la altul; câteva din valorile lor, ca şi limitele λ_0, λ_1 sunt date în tabelul 8.1.

Pentru fontă se foloseşte o variație parabolică

$$\sigma_{cr,f} = 776 - 12\lambda + 0{,}053\lambda^2 \tag{8.17}$$

valabilă pentru $\lambda \in [0,80]$.

8.2. CALCULUL PRACTIC LA FLAMBAJ

Problemele deosebite apar în cazul în care se face dimensionarea deoarece nu se cunosc dimensiunile secțiunii şi deci nu se poate determina λ.

În acest caz se pleacă de la ipoteza că flambajul se produce în domeniul deformațiilor elastice şi deci, se poate folosi relația lui Euler pentru dimensionare:

$$I_{\min}^{nec} = \frac{P \cdot c_{fe} \cdot l_f^2}{\pi^2 E} = I_{\min}^{\dim} \tag{8.18}$$

în care c_f este coeficientul de siguranță la flambaj care, pentru construcții metalice (structuri de hale industriale, clădiri, macarale etc.) se cu o variație liniară:

$$c_f = 1{,}6 + 0{,}0066\lambda\,, \tag{8.19}$$

în domeniul $\lambda \in (0,\lambda_0)$ şi cu o valoare constantă c_{fe}= 2,3 pentru $\lambda > \lambda_0$.

Pentru piese de maşini valorile extreme ce sunt indicate sunt: minimum $c_f = 4$ şi maximum $c_f = 28$. În tabelul 8.2. sunt indicate câteva valori recomandate pentru tije de piston şi biele, conform tratatelor de organe de maşini.

Odată cunoscute dimensiunile secţiunii se calculează λ şi se compară cu λ_0, respectiv λ_1 pentru a se constata în ce domeniu se produce flambajul:

– dacă $\lambda \le \lambda_0$ atunci rezultă că dimensionarea făcută cu relaţia (8.18) este corectă;

– dacă $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$ atunci se calculează $\sigma_{cr,f}$ cu relaţia (8.16) şi c_f cu relaţia (8.19); apoi se determină: $\sigma = \dfrac{P}{A_{ef}}$ şi se compară cu rezistenţa admisibilă la flambaj calculată cu relaţia:

$$\sigma_{a,f} = \frac{\sigma_{cr,f}}{c_f}; \tag{8.20}$$

daca $\sigma \le \sigma_{a,f}$ atunci dimensiunile secţiunii sunt bune, dacă nu, se măreşte secţiunea şi se reia calculul;

– dacă $\lambda < \lambda_1$, atunci calculul este identic cu cel precedent numai că $\sigma_{cr,f} = R_e$.

După cum se poate constata, calculul practic la flambaj este în fapt un calcul de verificare pe baza diagramei caracteristice la flambaj.

Metoda prezentată anterior este denumită metoda *coeficientului de siguranţă la flambaj*.

Probleme rezolvate

P.8.1. Să se dimensioneze un stâlp de lungime l = 2 m solicitat la compresiune de o forţă P = 280 kN. Stâlpul, de secţiune inelară (d/D = 0,8), are legături identice în cele două plane: articulaţie la un cap şi încastrare la celălalt (fig. 8.7). El este confecţionat din oţel cu următoarele caracteristici: $\sigma_c = R_e$ = 310 N/mm^2; a = 460 N/mm^2; b = 2,57 N/mm^2; λ_0 = 100; λ_1 = 60, iar coeficientul de siguranţă variază după legea (8.19).

Stâlpul, având aceleaşi legături în cele două plane, lungimile de flambaj vor fi identice şi egale cu $l_f = 0{,}7l$ conform cu figura 8.3, *c*.

Se face întâi o predimensionare cu formula lui Euler:

$$I_{\min}^{nec} = \frac{P \cdot c_{fe} \cdot l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{(280 \cdot 10^3)(2{,}26)(0{,}7 \cdot 2000)^2}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} = 5{,}98416 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

folosind pentru coeficientul de siguranţă valoarea c_{fe} = 1,6 + 0,0066·100 = 2,26.

Din egalitatea

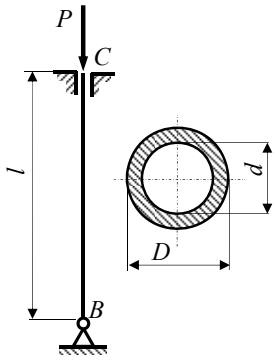


Fig. 8.7.

$$I_{\min}^{nec} = I_{\min}^{\dim} = \frac{\pi D^4}{64}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

rezultă:

$$D = \sqrt[4]{\frac{64\cdot 5{,}98416\cdot 10^5}{\pi(1-0{,}8^4)}} = 67{,}4 \text{ mm.}$$

Se adoptă D = 68 mm şi rezultă d = 0,8·68 = 54,5 mm. Se alege d = 54 mm.

Pentru verificarea condiţiei de pierdere a stabilităţii se calculează mai întâi raza de giraţie a secţiunii:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \frac{D}{4}\sqrt{1+\left(\frac{d}{D}\right)^2} = \frac{68}{4}\sqrt{1+\left(\frac{54}{68}\right)^2} = 21{,}71$$

mm

şi pe urmă coeficientul de zveltețe:

$$\lambda = \frac{l_f^2}{i_{\min}} = \frac{0{,}7\cdot 2000}{21{,}71} = 64{,}48\,.$$

Deoarece $\lambda_1 < \lambda = 64{,}48 < \lambda_0 = 100$, tensiunea critică se determină cu relaţia lui Tetmajer-Iasinski,

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 460 - 2{,}57\cdot 64{,}48 = 294{,}3 \text{ N/mm}^2.$$

Valoarea coeficientului de siguranţă în acest caz este c_{fe} = 1,6 + 0,0066·64,48 = 2,025, iar tensiunea admisibilă pentru ca flambajul să nu se producă este:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f} = \frac{294{,}3}{2{,}025} = 145{,}33 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea de compresiune la care bara este supusă are valoarea:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{280\cdot 10^3}{\frac{\pi\cdot 68^2}{4}\left[1-\left(\frac{54}{68}\right)^2\right]} = 208{,}72 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece $\sigma > \sigma_{af}$, se adoptă D = 70 mm şi d = 56 mm. Cu aceste valori, reluând calculele, se obţine: $i_{\min}$ = 22,41 mm λ = 62,47; σ_{cr} = 299,45 N/mm^2; c_f = 2,012; σ_{af} = 148,81 N/mm^2; σ_f = 202 N/mm^2 > σ_{af}. Întrucât diferenţa este relativ mare, se reface calculul, încercând o secţiune ceva mai mare. Se alege D = 80 mm şi d = 64 mm. Rezultă:

$$i_{\min} = \frac{80}{4}\sqrt{1+\left(\frac{64}{80}\right)^2} = 25{,}61\,\text{mm}; \qquad \lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{0{,}7\cdot 2000}{25{,}61} = 54{,}67\,.$$

Deoarece $\lambda = 54{,}67 < \lambda_1 = 60$, $\sigma_{cr} = \sigma_c = 310$ N/mm^2. Coeficientul de siguranță are valoarea $c_f = 1{,}6 + 0{,}006654{,}67 = 1{,}96$, şi deci:

$$\sigma_{af} = \frac{310}{1{,}96} = 158{,}2\ \text{N/mm}^2; \quad \sigma = \frac{280\cdot 10^3}{\frac{\pi\cdot 80^2}{4}\left[1-\left(\frac{64}{80}\right)^2\right]} = 154{,}7\ \text{N/mm}^2.$$

Deoarece $\sigma = 154{,}7$ N/mm$^2 < \sigma_{af} = 158{,}2$ N/mm^2, dimensiunile adoptate $D = 80$ mm şi $d = 64$ mm, sunt sigure în ceea ce priveşte flambajul stâlpului. Pentru aceste dimensiuni, solicitarea care ar produce pierderea stabilității, deci sarcina critică, este:

$$P_{cr} = \sigma_{cr}\cdot A_{ef} = 310\cdot\frac{\pi\cdot 80^2}{4}\left[1-\left(\frac{64}{80}\right)^2\right] = 561\,\text{kN}.$$

P.8.2. Să se dimensioneze tija bielei unui motor, secțiunea având forma schematică din figura 8.8, cunoscând următoarele date: diametrul pistonului $d = 120$ mm; presiunea maximă $p_{\max} = 4{,}8$ N/mm^2;lungimea bielei $l = 340$ mm; materialul bielei este oțel cu 5% Ni; coeficientul de siguranță $c_f = 5$.

Se consideră ca biela este articulată la capete în cele două plane *xOy* şi *xOz* şi se face o predimensionare cu formula lui Euler:

$$I_{\min}^{nec} = \frac{P\cdot c_f\cdot l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{(54{,}2867\cdot 10^3)(5)(340^2)}{\pi^2\cdot 2{,}1\cdot 10^5} = 15{,}1392\cdot 10^3\ \text{mm}^4,$$

$$P = \frac{\pi d^2}{4}p_{\max} = \frac{\pi\cdot 120^2}{4}\cdot 48 = 54{,}2867\cdot 10^3\ \text{N},$$

$$l_f = l = 340\ \text{mm}.$$

Conform cu figura 8.8, momentul de inerție minim este:

$$I_{\min}^{\dim} = I_y = 2\cdot\frac{(3t)^3 t}{12} + \frac{t^3\cdot 3t}{12} = 4{,}75t^4\,.$$

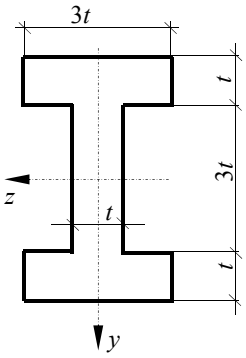


Fig. 8.8.

Din egaliatea:

$$15{,}1392\cdot 10^3 = 4{,}75t^4$$

rezultă:

$$t = \sqrt[4]{\frac{15{,}1392\cdot 10^3}{4{,}75}} = 7{,}51\,\text{mm}$$

Se adoptă $t = 8$ mm şi se calculează:

$$I_{\min} = 4{,}75 \cdot 8^4 = 19456 \text{ mm}^4; \qquad A = 9t^2 = 9 \cdot 8^2 = 576 \text{ mm}^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{19456}{576}} = 5{,}81 \text{ mm}; \quad \lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{340}{5{,}81} = 58{,}5$$

Se constată că $\lambda = 58{,}5 < \lambda_0 = 86$, corespunzătoare oțelului cu 5% Ni (v. tab. 8.1), fapt pentru care:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 461 - 2{,}25 \cdot 58{,}5 = 329{,}375 \text{ N/mm}^2;$$

Pentru $c_f = 5$, tensiunea admisibila are valoarea:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f} = \frac{329{,}375}{5} = 65{,}875 \text{ N/mm}^2;$$

care este mai mică decât tensiunea de compresiune din bielă:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{54{,}2876 \cdot 10^3}{576} = 94{,}25 \text{ N/mm}^2,$$

fapt pentru care se majorează valoarea lui t şi se adoptă $t = 10$ mm.

Rezultă:

$$I_{\min} = 4{,}75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; \qquad A = 900 \text{ mm}^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{47500}{900}} = 7{,}265 \text{ mm}; \qquad \lambda = \frac{340}{7{,}265} = 46{,}8;$$

$$\sigma_{cr} = 461 - 2{,}25 \cdot 46{,}8 = 355{,}7 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{af} = \frac{355{,}5}{5} = 71{,}14 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{54{,}2876 \cdot 10^3}{900} = 60{,}32 \text{ N/mm}^2 < \text{saf},$$

În concluzie ultima dimensiune adoptată este bună.

P.8.3. Să se dimensioneze un stâlp ($\sigma_a^{\text{comp}} = 10$ N/mm^2; $E = 0{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2; $c_f = 3{,}2$) cu secțiunea dreptunghiulară bxh şi de lungime $l = 3{,}2$ m. Stâlpul este încastrat la ambele capete, la partea superioară încastrarea fiind deplasabilă pe o direcție (fig. 8.9), şi este solicitat de o forță $P = 240$ kN.

Legăturile stâlpului în planul cu normala z (fig. 8.9, a) implică o lungime de flambaj $l_{fz} = 0{,}5l$, iar legăturile în planul cu normala y (fig. 8.9, b) implică o lungime de flambaj $l_{fz} = l$.

Deoarece, în cele două planuri lungimile de flambaj sunt diferite şi pentru că valoarea tensiunii admisibile la flambaj σ_{af} depinde de coeficientul de zveltețe λ, pentru o dimensionare rațională a secțiunii stâlpului este necesar ca $\lambda_z = \lambda_y$, adică:

$$\frac{l_{fz}}{i_z} = \frac{l_{fy}}{i_y};$$

Secțiunea având dimensiunile b şi h (fig. 8.9) rezultă:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12}\cdot\frac{1}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}; \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12}\cdot\frac{1}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

Şi deci

$$\frac{0{,}5l}{\frac{b}{\sqrt{12}}} = \frac{l}{\frac{h}{\sqrt{12}}} \Rightarrow h = 2b$$

Daca $h = 2b$ flambajul este la fel de periculos în cele două planuri, şi deoarece, valoarea numerică a lui λ nu este cunoscută este necesară efectuarea unei predimensionări, care se face cu ajutorul formulei lui Euler:

$$I_{\min}^{nec} = \frac{240\cdot 10^3\cdot 3{,}2\cdot(0{,}5\cdot 3200)^2}{\pi^2\cdot 0{,}1\cdot 10^5} = 19{,}92055\cdot 10^6\ \text{mm}^4$$

Având în vedere că $h = 2b$, din egalitatea:

$$I_{\min}^{\dim} = \frac{hb^3}{12} = 19{,}92055\cdot 10^6$$

se obține $b = 104{,}5$ mm.

Se adoptă $b = 105$ mm şi $h = 210$ mm. Rezultă:

$$\lambda = \lambda_z = \lambda_y = \frac{0{,}5l\sqrt{12}}{b} = \frac{0{,}5\cdot 3200\sqrt{12}}{105} = 52{,}79$$

$< \lambda_0 = 100$ (v. tab.8.1).

Se trage concluzia că secțiunea este subdimensionată fapt pentru care se adoptă $b = 120$ mm şi $h = 240$ mm.

Cu valorile $a = 28{,}7$ N/mm^2 şi $b = 0{,}19$ N/mm^2, indicate în tabelul 8.1 pentru lemn, se calculează:

$$\lambda = \frac{0{,}5\cdot 3200\cdot\sqrt{12}}{120} = 46{,}19;$$

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 28{,}7 - 0{,}19\cdot 46{,}19 = 19{,}92\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f} = \frac{19{,}92}{3{,}2} = 6{,}22\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{240\cdot 10^3}{120\cdot 240} = 8{,}33\ \text{N/mm}^2.$$

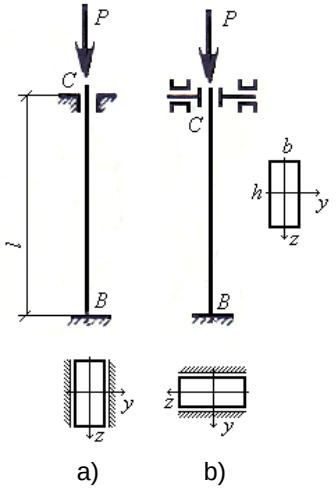


Fig. 8.9.

Deoarece $\sigma = 8{,}33$ N/mm^2 > $\sigma_{af} = 6{,}22$ N/mm^2 se măreşte secțiunea $b = 140$ mm şi $h = 280$ mm şi se reiau calculele. Rezultă:

$$\lambda = \frac{0{,}5 \cdot 3200 \cdot \sqrt{12}}{140} = 39{,}56\ ;$$

$$\sigma_{cr} = 28{,}7 - 0{,}19 \cdot 39{,}56 = 21{,}18\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma_{af} = \frac{21{,}18}{3{,}2} = 6{,}62\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{240 \cdot 10^3}{140 \cdot 280} = 6{,}12\ \text{N/mm}^2 < \sigma_{af} = 6{,}62\ \text{N/mm}^2.$$

În concluzie stâlpul trebuie să aibă dimensiunile secțiunii 140x280 mm.

P.8.4. Cadrul din figura 8.10, a acționat de forța P = 480 kN după direcția barei AC, are barele DC şi CB de rigiditate foarte mare, astfel încât se pot considera practic, indeformabile. Să se dimensioneze stâlpul cu secțiunea casetată având forma şi poziția precizate în figura 8.10, *a*

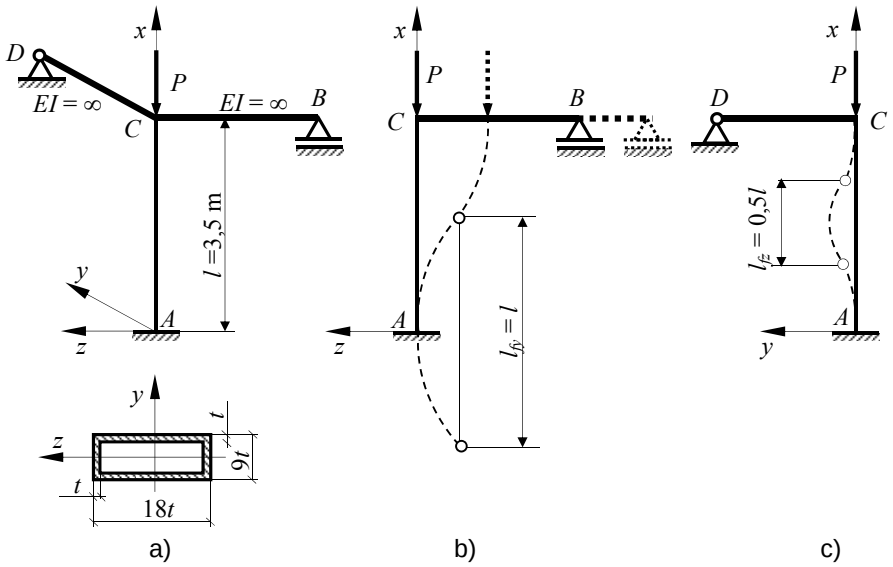


Fig. 8.10.

cunoscând că este confecționat din oțel S235.

În cazul barelor care au legături diferite în planele xOy şi xOz, axele y şi z fiind axe principale de inerție, dimensionarea corectă implică asigurarea la flambaj atât în planul xOy cât şi în planul xOz. Cum flambajul poartă numele normalei la planul în care se produce (în formula lui Euler momentul de inerție al secțiunii este cel în raport cu axa după care este dirijat momentul încovoietor), flambajul în planul xOy este denumit flambaj după z, iar flambajul în planul xOz este denumit flambaj după y.

Deoarece sarcina critică minimă $P_{cr}^{\min}$ corespunde valorii λ = max [λ_y; λ_z], dimensionarea rațională a secțiunii necesită valori cât mai apropiate pentru coeficienții de zveltețe (ideal ar fi ca $\lambda_y = \lambda_z$, așa cum s-a întâmplat în cazul problemei P.8.3). Aceasta se poate realiza orientând secțiunea, atunci când este posibil, astfel încât, axa în raport cu care momentul de inerție este maxim să coincidă cu axa normală la planul în care lungimea de flambaj este maximă.

În cazul nostru în planul *xz*, datorită rigidității infinite a barei *CB* şi reazemului simplu din *B* lungimea de flambaj a stâlpului este $l_{fy} = l$ = 3,5 m (fig. 8.10, *b*), iar în planul *xy*, datorită articulației din *D* şi rigidității infinite a barei *BC* lungimea de flambaj în acest plan este $l_{fz} = 0{,}5l$ = =1,75m (fig. 8.10, *c*).

Deoarece $l_{fy} > l_{fz}$, conform celor precizate anterior, pentru o dimensionarea rațională trebuie ca $I_y > I_z$, condiție îndeplinită de stâlpul *AC* prin poziționarea secțiunii aşa cum este prezentat în figura 8.10, *a*.

Caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:

$$I_y = \frac{(18t)^3(9t)}{12} - \frac{(16t)^3(7t)}{12} = 1984{,}67t^4\,;$$

$$I_z = \frac{(18t)(9t)^3}{12} - \frac{(16t)(7t)^3}{12} = 636{,}17t^4\,;$$

$$A = 18t \cdot 9t - 16t \cdot 7t = 50t^2$$

$$i_z = \sqrt{\frac{1984{,}67t^4}{50t^2}} = 6{,}3t\,; \qquad i_z = \sqrt{\frac{636{,}17t^4}{50t^2}} = 3{,}57t\,.$$

Coeficienții de zveltețe au valorile:

$$\lambda_y = \frac{l_{fy}}{i_y} = \frac{3500}{6{,}3t} = \frac{555{,}55}{t}\,;\ \lambda_z = \frac{l_{fz}}{i_z} = \frac{1750}{3{,}57t} = \frac{490{,}2}{t}\,.$$

Deoarece λ = max[λ_y, λ_z] = λ_y = 555,55/*t* flambajul stâlpului *AC* se produce după axa *y* (în planul *xz*).

Se face o predimensionare cu formula lui Euler, considerând că flambajul se produce în domeniul elastic:

$$I_y^{nec} = \frac{P \cdot c_f \cdot l_{fz}^2}{\pi^2 E} = \frac{480 \cdot 10^3 \cdot 2{,}3 \cdot 3500^2}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} = 6{,}525 \cdot 10^6\ \text{mm}^4.$$

Din egalitatea $I_y^{\dim} = I_y^{nec}$ rezultă

$$t = \sqrt[4]{\frac{6{,}525 \cdot 10^6}{1984{,}67}} = 7{,}57\ \text{mm}.$$

Se adoptă *t* = 8 mm şi se calculează coeficientul de zveltețe:

$$\lambda_y = \frac{l_{fy}}{i_y} = \frac{3500}{6{,}3 \cdot 8} = 69{,}44$$

Deoarece λ_y este mai mic decât $\lambda_0 = 105$, dar mai mare decât $\lambda_1 = 60$ (valori corespunzătoare oțelului S235 indicate în tabelul 8.1) tensiunea critică se calculează cu relația (8.16), iar coeficientul de flambaj cu (8.19):

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304 - 1{,}12 \cdot 69{,}44 = 226{,}23 \text{ N/mm}^2;$$

$$c_f = 1{,}6 + 0{,}0066 \cdot 69{,}44 = 2{,}06 .$$

Rezultă

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f} = \frac{226{,}23}{2{,}06} = 109{,}82 \text{ N/mm}^2.$$

Tensiunea de compresiune în stâlp este:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{480 \cdot 10^3}{50 \cdot 8^2} = 150 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{af}.$$

Se mărește grosimea pereților secțiunii $t = 9{,}2$ mm şi se face din nou verificarea.
Se calculează:

$$\lambda_z = \frac{3500}{6{,}3 \cdot 9{,}2} = 60{,}39 ;$$

$$\sigma_{cr} = 304 - 1{,}12 \cdot 60{,}39 = 236{,}36 \text{ N/mm}^2;$$

$$c_f = 1{,}6 + 0{,}0066 \cdot 54{,}47 = 1{,}998 ;$$

$$\sigma_{af} = \frac{236{,}36}{1{,}998} = 118{,}3 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma = \frac{480 \cdot 10^3}{50 \cdot 9{,}2^2} = 113{,}4 \text{ N/mm}^2.$$

Deoarece $\sigma < \sigma_{af}$ rezultă că valoarea adoptată pentru t este corespunzătoare.

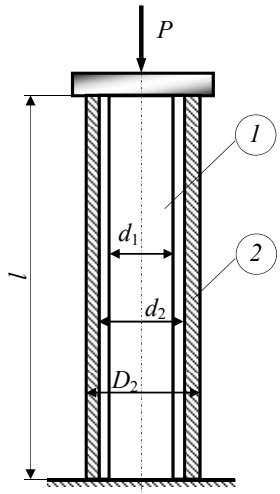


Fig. 8.11.

P.8.5. Un stâlp de înălțime $l = 3{,}4$ m se compune dintr-un cilindru de oțel *1* şi un tub de fontă *2* aşezați concentric (fig. 8.11). Ştiind că $d_1 = 100$ mm, $d_2 = 120$ mm, $D_2 = 150$ mm, $E_1 = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2, $E_2 = 1{,}2 \cdot 10^5$ N/mm^2, $\underline{c_f} = 5$, să se calculeze forța capabilă a stâlpului. Forța P acționează asupra celor două elemente ale stâlpului printr-o placă orizontală foarte rigidă, iar stâlpul se consideră încastrat la capătul de jos.

Pentru cilindrul de oțel caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:

– raza de inerție

$$i_1 = \frac{d_1}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ mm};$$

– momentul de inerție principal axial al secțiunii cilindrului

$$I_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{\pi \cdot 100^4}{64} = 4{,}9087 \cdot 10^6 \text{ mm}^4;$$

– aria secțiunii

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 100^2}{4} = 7853{,}98 \text{ mm}^2.$$

Coeficientul de zveltețe al cilindrului de oțel este

$$\lambda_1 = \frac{l_{f1}}{i_1} = \frac{2 \cdot 3400}{25} = 272 > \lambda_0 = 105;$$

din care cauză forța capabilă a cilindrului de oțel rezultă din formula lui Euler:

$$P_1 = \frac{\pi^2 E_1 I_1}{c_f l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 4{,}9087 \cdot 10^6}{5 \cdot (2 \cdot 3400)^2} = 44004 \text{ N}.$$

Pentru tubul de fontă caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:
– raza de inerție a tubului de fontă

$$i_2 = \frac{1}{4}\sqrt{D_2^2 + d_1^2} = \frac{1}{4}\sqrt{150^2 + 120^2} = 48{,}02 \text{ mm};$$

– momentul de inerție principal axial al secțiunii

$$I_2 = \frac{\pi D_2^4}{64}\left[1 - \left(\frac{d_2}{D_2}\right)^4\right] = \frac{\pi \cdot 150^4}{64}\left[1 - \left(\frac{120}{150}\right)^4\right] = 14{,}6717 \cdot 10^6 \text{ mm}^4;$$

– aria secțiunii

$$A_2 = \frac{\pi D_2^3}{4}\left[1 - \left(\frac{d_2}{D_2}\right)^2\right] = \frac{\pi \cdot 150^2}{4}\left[1 - \left(\frac{120}{150}\right)^2\right] = 6361{,}72 \text{ mm}^2.$$

Coeficientul de zveltețe al tubului de fontă este

$$\lambda_2 = \frac{l_{f2}}{i_2} = \frac{2 \cdot 3400}{48{,}02} = 141 > \lambda_0 = 80;$$

Deci, forța capabilă a tubului de fontă este:

$$P_2 = \frac{\pi^2 E_2 I_2}{c_f l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 14{,}6717 \cdot 10^6}{5 \cdot (2 \cdot 3400)^2} = 75158 \text{ N}.$$

Forța capabilă a stâlpului rezultă din relația de calcul a sistemelor static nedeterminate la solicitări axiale(v. P.3.10). Eforturile axiale din cilindru de oțel şi tubul de fontă, datorate forței P sunt:

$$N_1 = \frac{P}{1+\dfrac{E_2 A_2}{E_1 A_1}}; \qquad N_2 = \frac{P}{1+\dfrac{E_1 A_1}{E_2 A_2}}.$$

Din condițiile $N_1 = P1$ şi $N_2 = P_2$ rezultă două valori P' şi P'';

$$P' = P_1\left(1+\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}\right) = 44004\left(1+\frac{1{,}2\cdot 10^5\cdot 6361{,}72}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 7853{,}98}\right) = 64371\ \text{N};$$

$$P'' = P_1\left(1+\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}\right) = 75158\left(1+\frac{2{,}1\cdot 10^5\cdot 7853{,}98}{1{,}2\cdot 10^5\cdot 6361{,}72}\right) = 237536\ \text{N}.$$

Rezultă că forța capabilă a stâlpului este $P_{cap} = \min[P', P''] = 64371$ N

Probleme suplimentare

P.8.6. Să se calculeze coeficientul de siguranță la flambaj pentru un stâlp de oțel de secțiune inelară D = 120 mm şi d = 100 mm, încastrat la un capăt şi articulat la celălalt, având lungimea l = 2,2 m. Stâlpul este comprimat de forța P = 94 kN. Se dă λ_0 = 105.

P.8.7. Un stâlp metalic de lungime l = 3 m (fig.8.12) este încastrat în A şi rezemat în B numai după direcția y. Să se dimensioneze stâlpul din S235, pentru P = 460 kN.

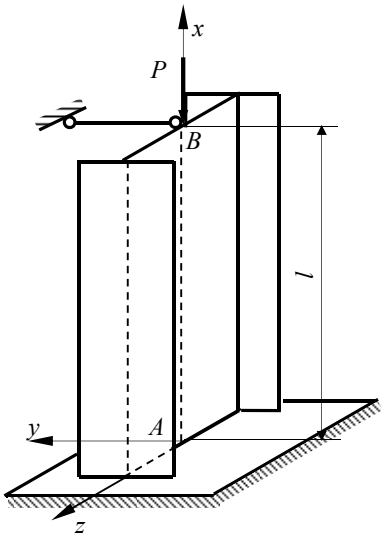


Fig. 8.12.

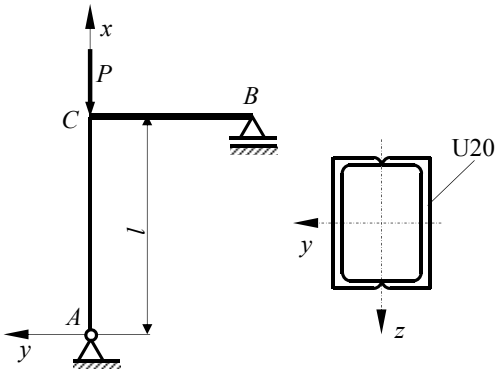


Fig. 8.13.

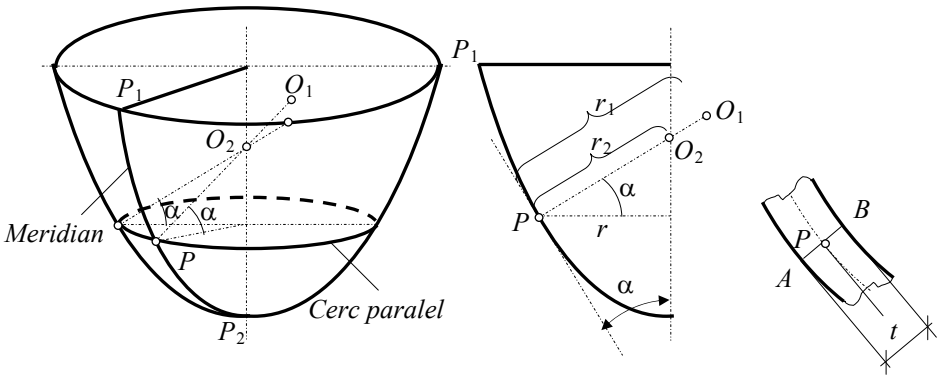
P.8.9. O bară cilindrică cu diametrul d = 100 mm şi lungime l = 6 m este fixată rigid, în plan vertical, între doi pereţi la temperatura $t_1 = 20^oC$. Să se calculeze temperatura limită până la care se poate încălzi uniform bara, fără ca aceasta să flambeze. Se dă coeficientul de dilataţie termică $\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} şi modulul de elasticitate $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2.

P.8.10. Să se dimensioneze un stâlp de lemn de lungime l = 3,2 m şi secţiune pătrată bxb solicitat la compresiune de o forţă P = 120 kN. Stâlpul este încastrat la un capăt şi simplu rezemat la celălalt.

P.8.11. Cadrul din figura 8.13 are bara AC alcătuită din două profile U20 şi bara BC de rigiditate infinită. Ştiind că nodul C nu se poate deplasa în direcţia normalei la planul cadrului (axa z) să se determine forţa critică de flambaj (bara AC este confecţionată din oţel S360).

9. CALCULUL PLĂCILOR SUBŢIRI DE REVOLUŢIE ÎN TEORIA DE MEMBRANĂ

Plăcile subţiri de revoluţie sunt plăci la care suprafaţa mediană se obţine prin rotirea unei curbe plane în jurul unei axe cuprinsă în planul ei. Curba plană se numeşte *curbă meridiană*, planul ei *plan meridian*, iar axa în jurul căreia se roteşte, *axă de revoluţie*. Fiecare punct P al meridianului descrie un cerc de rază r, cu centrul pe axa de revoluţie, denumit *cerc paralel* (fig. 9.1, *a*).



a) b) c)

Fig. 9.1.

Raza de curbură r_1 a meridianului reprezintă distanţa de la punctul P la centrul de curbură O_1 al acestuia, situat pe normala la planul tangent în punctul P la suprafaţa mediană (fig. 9.1, *b*). Intersecţia suprafeţei mediane cu un plan perpendicular pe planul meridian, care conţine normala în punctul P la planul tangent la suprafaţa mediană, reprezintă a doua curbă principală în punctul P al suprafeţei mediane (fig. 9.1, *a*). Raza de curbură a acestei curbe este notată cu r_2 şi reprezintă distanţa de la punctul P la centrul de curbură O_2 situat pe axa de simetrie (revoluţie).

Între raza de curbură r_2 şi raza cercului paralel r există relaţia (fig. 9.1, *b*):

$$r_2 = \frac{r}{\cos\alpha} \tag{9.1}$$

Normalele la planele tangente în fiecare punct P al suprafeţei mediane intersectează placa în punctele A şi B, dispuse simetric faţă de punctul P. Lungimea segmentului AB reprezintă grosimea t a plăcii în punctul P (fig. 9.1, *c*). Placa este de grosime constantă dacă valoarea lui t este aceeaşi în toate punctele suprafeţei mediane. Placa se consideră subţire atunci când raportul t/r_2 poate fi neglijat faţă de unitate.

Modul cel mai simplu de tratare a acestor vase este de a considera că peretele vasului se comportă ca o membrană şi în consecinţă el este solicitat numai la eforturi în planul tangent la suprafaţa mediană. Această ipoteză corespunde studiului vaselor în *teoria de membrană* sau *teoria fără momente*. Condiţia ca un vas de rotaţie cu pereţi subţiri să poată fi calculat în teoria de membrană este ca presiunea din interiorul lui, într-un plan normal pe axa de simetrie, să fie constantă. O astfel de solicitare este dată de forţe de presiune, pe care le exercită un fluid greu sau un material fără coeziune, aflat în interiorul vasului sau pe exteriorul unui vas de revoluţie cu axa verticală sau un gaz sub presiune aflat în interiorul unui vas de revoluţie închis.

Teoria de membrană admite distribuţia uniformă a tensiunilor pe grosimea plăcii. În consecinţă, este suficient să se determine starea de tensiuni din jurul punctului P de pe suprafaţa mediană.

9.1. EFORTURI SECŢIONALE ŞI TENSIUNI

Cu ajutorul a două meridiane şi a două cercuri paralele se izolează un element de înveliş $\mathrm{d}s_1$, $\mathrm{d}s_2$ (fig. 9.2, *a*). Arcul meridian $\mathrm{d}s_1$ are raza de curbură r_1, iar arcul paralel $\mathrm{d}s_2$ are raza de curbură r_2 (fig. 9.2, *b*). Între lungimile elementare ale arcelor şi razele de curbură există relaţiile:

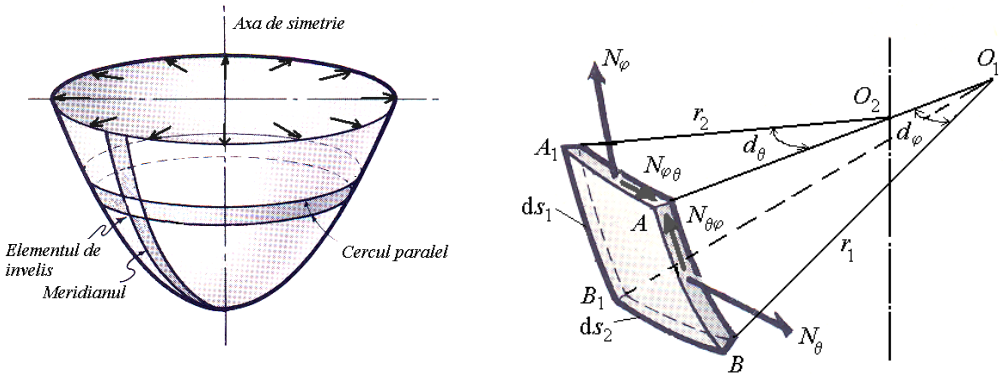
$$\mathrm{d}s_1 = r_1 \mathrm{d}\varphi\,; \qquad \mathrm{d}s_2 = r_2 \mathrm{d}\theta\,. \tag{9.2}$$

Deoarece în teoria de membrană distribuţia tensiunilor pe grosimea t a plăcii se consideră uniformă, eforturile din planele principale (fig. 9.2, *b*), denumite eforturi secţionale se reduc la componentele:

$$N_\varphi = \sigma_\varphi \cdot t\,; \quad N_{\varphi\theta} = \sigma_{\varphi\theta} \cdot t\,; \quad N_\theta = \sigma_\theta \cdot t\,; \quad N_{\theta\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} \cdot t \tag{9.3}$$

care se dezvoltă în planul tangent al suprafeţei mediane şi se exprimă în N/m.

Deoarece, în baza dualităţii tensiunilor tangenţiale $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{\theta\varphi}$, rezultă că $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$.



a) b)

Fig. 9.2.

Pe de altă parte, datorită încărcării simetrice faţă de axul de revoluţie, eforturile secţionale $N_{\varphi\theta} = 0$, momentul lor în raport cu axa de revoluţie este nul deoarece forţele exterioare, simetrice faţă de axul de revoluţie, dau moment nul în raport cu acesta. În consecinţă, la învelişurile de rotaţie încărcate simetric apar numai două necunoscute N_φ şi N_θ.

Pentru determinarea lor se izolează elementul infinitezimal $ds_1 ds_2$ (fig. 9.3, *a*). În centrul acestui element s-a reprezentat rezultanta încărcării exterioare de pe elementul respectiv $-p ds_1 ds_2$, iar pe grosimea peretelui, forţele corespunzătoare eforturile secţionale. Datorită simetriei, N_θ este constant, în schimb N_φ creşte odată cu creşterea unghiului φ. Din ecuaţia de proiecţie pe direcţia rezultantei forţelor exterioare $p ds_1 ds_2$ se obţine (fig. 9.3, *b* şi *c*):

$$\left(N_\varphi + N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial s_1}\right) ds_2 \sin\frac{d\varphi}{2} + 2N_\theta ds_1 \sin\frac{d\theta}{2} - p ds_1 ds_2 = 0\,. \qquad (9.4)$$

Dacă se fac aproximaţiile $\sin\frac{d\varphi}{2} \cong \frac{d\varphi}{2}$, $\sin\frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2}$, se împarte cu $ds_1 ds_2$ şi se trece la limită $d\varphi \to 0$, ecuaţia (9.4) devine:

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p\,. \qquad (9.5)$$

Ecuaţia (9.5) este cunoscută sub numele de ecuaţia lui Laplace. În această ecuaţie p este pozitiv când acţionează în sens opus faţă de centrul de curbură.

Pentru rezolvarea completă a problemei mai este necesară o ecuație de echilibru. Această ecuație se poate obține dacă se folosește ecuația de echilibru general pentru acea parte din înveliș care nu are legături cu terenul.

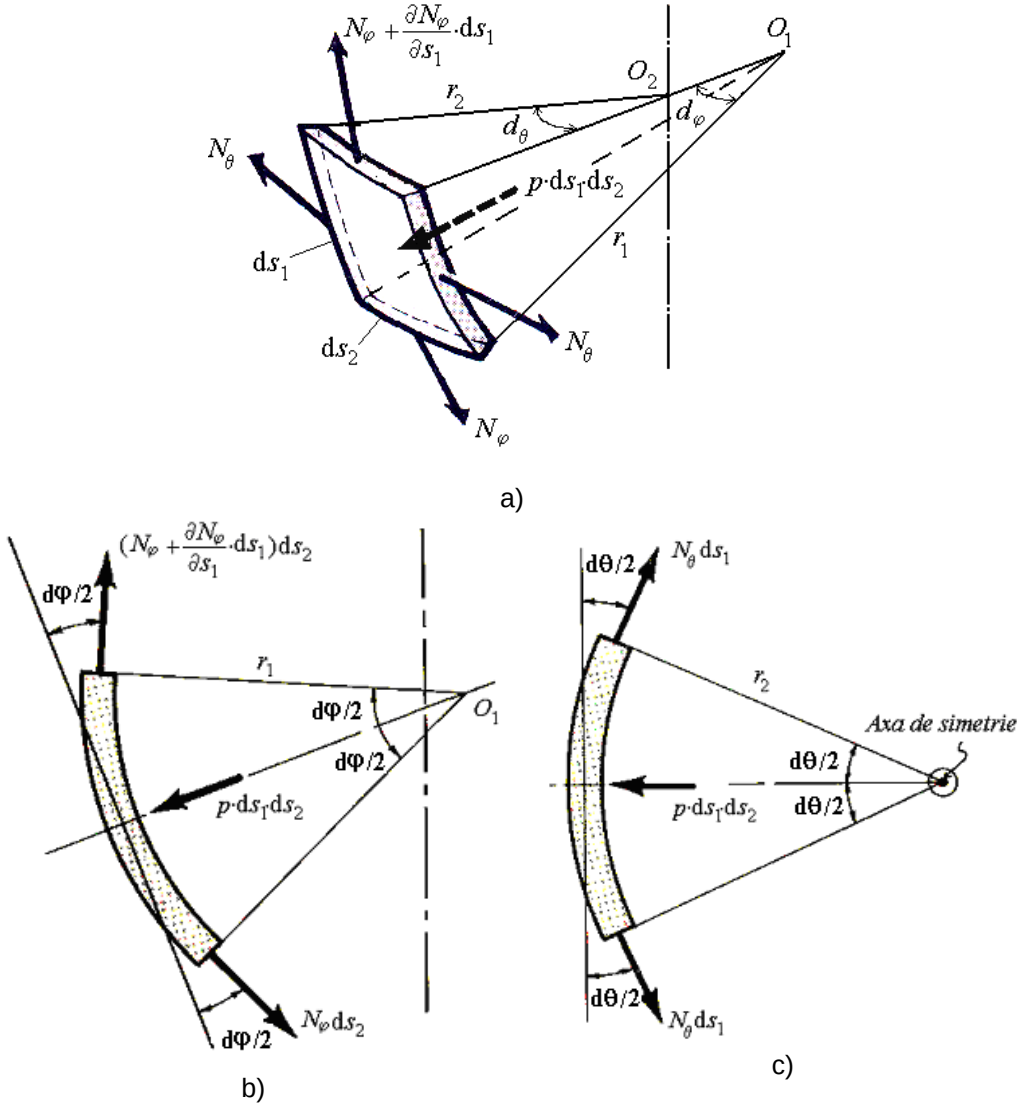
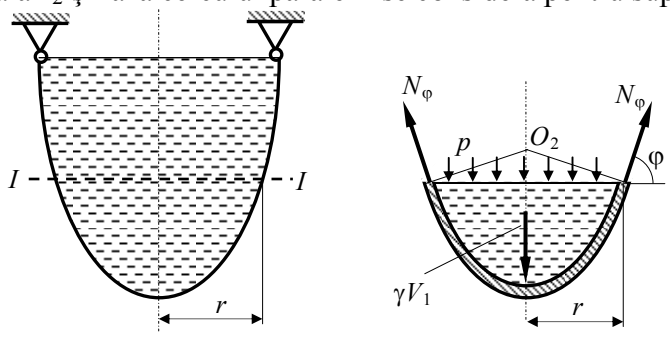


Fig. 9.3.

În acest scop se secționează placa printr-un con cu vârful în O_2 iar, materialul din interiorul vasului, cu un plan care conține cercul paralel pe care se află punctul în care se caută valoarea lui N_φ, de exemplu secțiunea $I-I$ în figura 9.4, *a*. Din cele două parți în care vasul a fost împărțit, se reține partea de jos, adică acea parte care nu are legături cu terenul. Forțele de legătură care trebuie introduse sunt cele

corespunzătoare efortului secţional N_φ şi presiunii p în planul de secţionare (fig. 9.4, *b*). Deoarece grosimea peretelui vasului este mică în raport cu razele învelişului, raza principală r_2 şi raza cercului paralel r se consideră pentru suprafaţa mediană.



a) b)

Fig. 9.4.

Din ecuaţia de proiecţie pe axul de revoluţie a tuturor forţelor ce acţionează pe porţiunea de înveliş reţinut (fig. 9.4, *b*):

$$(N_\varphi \cdot 2\pi r)\cdot \sin\varphi - p\cdot \pi r^2 - \gamma V_1 = 0 \tag{9.6}$$

în care γV_1 reprezintă greutatea lichidului sau gazului din interiorul părţii izolate, se obţine:

$$N_\varphi = \frac{p\cdot \pi r^2 + \gamma V_1}{2\pi r \sin\varphi} \tag{9.7}$$

Se poate reţine şi porţiunea din vas care prezintă legăturile cu terenul dar, în acest caz, trebuie determinate mai întâi forţele de legătură exterioare şi apoi efortul secţional N_φ.

9.2. DIMENSIONAREA ÎNVELIŞULUI

În fiecare punct din peretele vasului se dezvoltă o stare plană de tensiuni ale căror valori se deduc din relaţiile (9.3):

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{t}; \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t}. \tag{9.8}$$

Pentru dimensionare se aplică una din teoriile de rezistență recomandate. De exemplu în cazul teoriei T_τ, condiția de rezistență este

$$\sigma_{ech} = \max\left[\left|\sigma_\varphi\right|,\ \left|\sigma_\varphi\right|,\ \left|\sigma_\varphi - \sigma_\theta\right|,\right] \le \beta \cdot \sigma_a, \tag{9.9}$$

în care β este un coeficient care ține seama de capacitatea mai mică de rezistență a plăcii în secțiunile de îmbinare dintre tablele din care este confecționat vasul. Dacă placa se realizează din table sudate cap la cap, $\beta \in (0{,}8 \div 0{,}85)$.

Folosind relațiile (9.8) grosimea necesară a peretelui vasului se determină astfel:

– dacă $N_\varphi \cdot N_\theta < 0$,

$$t \ge \frac{\left|N_\varphi\right| + \left|N_\theta\right|}{\beta\sigma_a}; \tag{9.10}$$

– dacă $N_\varphi \cdot N_\theta > 0$, ,

$$t \ge \frac{\max\left[\left|N_\varphi\right|,\ \left|N_\theta\right|\right]}{\beta\sigma_a}. \tag{9.11}$$

La grosimea t a peretelui, rezultată din calculul de rezistență, trebuie să se țină seama de adaosul tehnologic t_t şi adaosul de coroziune t_c care depinde de agresivitatea fluidului conținut în vas.

9.3. CALCULUL INELELOR DE RIGIDIZARE

Pentru ca să fie posibilă starea de echilibru de membrană este necesar ca legăturile să fie după direcția tangentei la meridian pe inelul de sprijin adică suprafața de sprijin să fie normală pe suprafața mediană a plăcii (fig. 9.5, *a*).

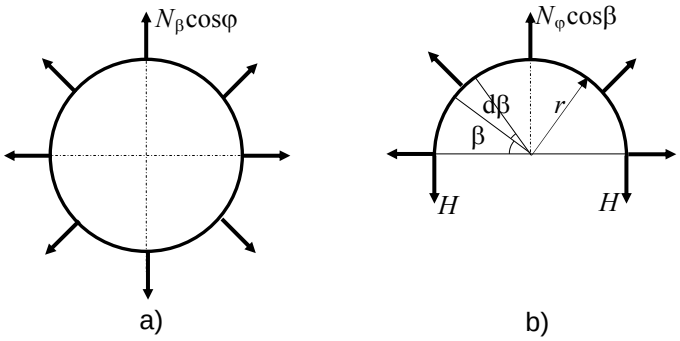


Fig. 9.6.

De obicei suprafaţa de sprijin este orizontală (fig. 9.5, *b*), fapt pentru care efortul secţional se descompune şi apare o solicitare suplimentară datorită componentei $N_\varphi \cdot \cos\varphi$. Această solicitare apare şi în cazul zonelor de racordare a învelişurilor (de exemplu racordarea unei părţi cilindrice cu o calotă sferică prezentată în figura 9.5, *c*). Componenta orizontală $N_\varphi \cdot \cos\beta$ trebuie preluată de un inel numit inel de rigidizare. Neglijând deformaţiile inelului şi ale învelişului se poate calcula efortul axial H din inel, considerând echilibrul unei jumătăţi de inel (fig. 9.6, *b*):

$$2H = \int_0^\pi N_\varphi \cos\beta \cdot r d\alpha \sin\alpha = 2N_\varphi r \cos\beta \tag{9.12}$$

de unde

$$H = N_\varphi \cdot r \cdot \cos\beta \,. \tag{9.13}$$

În cazul vaselor de revoluţie, în zonele de racordare ale învelişurilor (fig. 9.6, *a*) inelele de rigidizare sunt comprimate, verificarea lor făcându-se la flambaj cu relaţia:

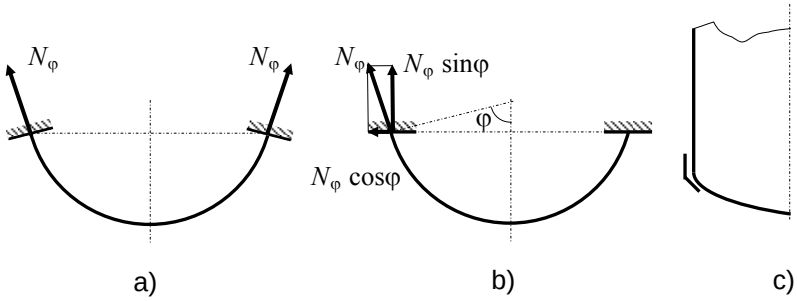


Fig. 9.5.

$$N_i = |Hr| \le N_{af} = \frac{N_{cr}}{c_f} = \frac{3EI}{c_f r^2} \tag{9.14}$$

în care N_i este efortul axial din inel, c_f – coeficientul de siguranță la flambaj, I – momentul de inerție al secțiunii inelului față de axa centrală proprie normală pe planul inelului, E – modulul de elasticitate longitudinal al materialului din care este confecționat inelul.

Calculul exact al tensiunilor ce se dezvoltă în zonele de racordare şi de rezemare ale vaselor subțiri necesită luarea în considerare a momentelor încovoietoare, calculul prezentat mai sus reprezintă un calcul simplificat pentru inelele de rigidizare, el constituind o soluție satisfăcătoare pentru unele cazuri practice.

Probleme rezolvate

P.9.1. Să se determine eforturile secționale în pereții unui vas conic rezemat la partea superioară, de înălțime H şi rază R, plin cu un lichid de greutatea specifică γ (fig. 9.8, *a*).

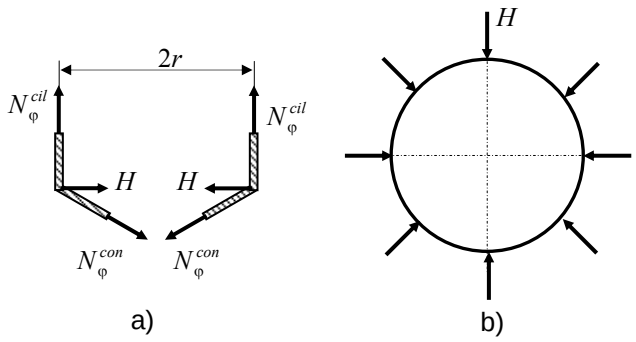


Fig. 9.7.

Deoarece în cazul rezervorului conic meridianul este o linie dreaptă $r_1 = \infty$ şi formula lui Laplace (9.5) ia forma:

$$\frac{N_\theta}{r_2} = p\,,$$

în care $p = \gamma y$ este presiunea la cota y a vasului, iar

$$r = \frac{r}{\cos\alpha} = r\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{R}{H}(H-y)\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}\,.$$

Rezultă:

$$N_\theta = \gamma\frac{R}{H}y(H-y)\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}$$

Se constată că efortul secțional N_θ are o variație parabolică reprezentată în figura 9.8, *c*. Pentru determinarea punctului în care efortul secțional are valoare maximă se derivează expresia lui N_θ şi se egalează cu zero:

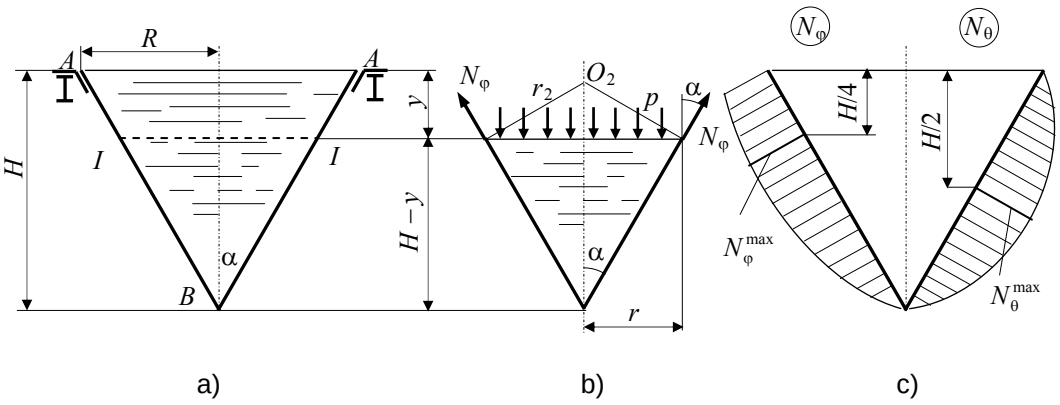


Fig. 9.8.

$$\frac{\mathrm{d}N_\theta}{\mathrm{d}y} = \gamma\frac{R}{H}(H-2y)\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{H}{2}\,.$$

Valoarea maximă este:

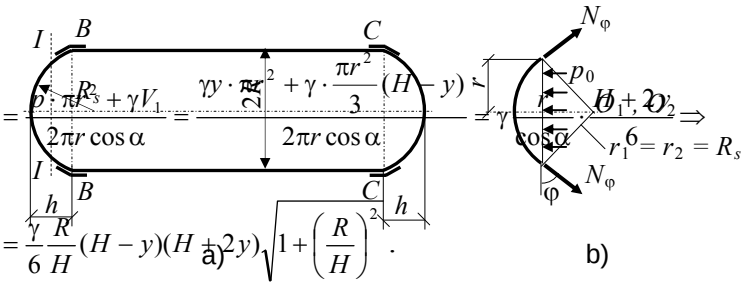
$$N_\theta^{\max} = \frac{1}{4}\gamma RH\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}\,.$$

Pentru determinarea lui N_φ la cota y a vasului se face o secțiune $I - I$ şi se izolează partea inferioară (cea care nu prezintă legături cu terenul) (fig. 9.8, *b*). Din ecuația de proiecție pe axa de revoluție:

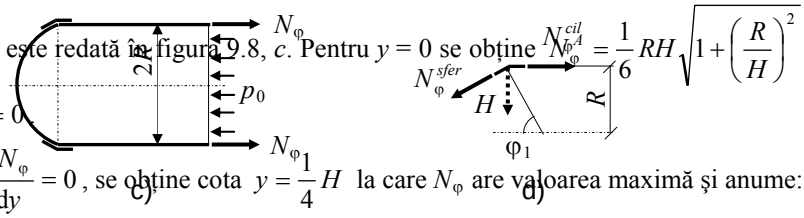
$$N\varphi \cdot 2\pi r \cdot \cos\alpha - p \cdot \pi r^2 - \gamma V_1 = 0 ,$$

rezultă:

$$N_\varphi = \frac{p \cdot \pi r^2 + \gamma V_1}{2\pi r \cos\alpha} = \frac{\gamma y \cdot \pi r^2 + \gamma \cdot \frac{\pi r^2}{3}(H - y)}{2\pi r \cos\alpha} = \frac{\gamma}{6}\frac{R}{H}(H - y)(H + 2y)\sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} .$$



Variația lui N_φ este redată în figura 9.8, *c*. Pentru $y = 0$ se obține $N_\varphi^A = \frac{1}{6}RH\sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2}$, iar pentru $y = H$, $N_\varphi^B = 0$.



Din condiția $\frac{dN_\varphi}{dy} = 0$, se obține cota $y = \frac{1}{4}H$ la care N_φ are valoarea maximă şi anume:

$$N_\varphi^{\max} = \frac{3}{16}\gamma RH\sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} .$$

Fig. 9.9.

Se constată că $N_\theta^{\max} > N_\varphi^{\max}$.

În inelul de rezemare apare efortul:

$$N_i = -HR = -\left(N_\varphi^A \cdot \sin\alpha\right)R = -\frac{1}{6}\gamma R^3 .$$

P.9.2. Un recipient pentru depozitarea gazelor lichefiate are raza R = 1 m şi fundurile sub formă de calote sferice de înălțime h = 0,42 m (fig. 9.9, *a*). Presiunea interioară la care sunt depozitate gazele este p_0 = 8 bar. Mantaua rezervorului este confecționată din virole cilindrice în construcție sudată, cu îmbinare cap la cap, iar asamblarea fundurilor la manta se face tot prin sudură. Ştiind că rezistența admisibilă a materialului este σ_a = 120 N/mm^2, iar β = 0,8, să se dimensioneze pereții rezervorului.

În cazul unui înveliş sferic cele două raze de curbură sunt egale cu raza sferei $r_1 = r_2 = R_s$, fapt pentru care formula (9.5) devine:

$$N_\varphi + N_\theta = pR_s,$$

în care $p = p_0 = 8$ bar = 0,8 N/mm^2, iar, din considerente geometrice, (fig. 9.9, *a*)

$$R_s = \frac{R^2 + h^2}{2h} = \frac{1 + 0{,}42^2}{2 \cdot 0{,}42} = 1{,}4 \text{ m}.$$

Pentru determinarea eforturilor secționale mai este necesară o ecuație. Pentru aceasta se efectuează secțiunea $I - I$ prin fundul sferic (fig. 9.9, *a*) şi se proiectează pe axa de simetrie forțele corespunzătoare efortului secțional N_φ şi presiuni p_0 (fig. 9.9, b):

$$(N_\varphi \sin\varphi) \cdot 2\pi r - p_0 \pi r^2 = 0.$$

Rezultă

$$N_\varphi = \frac{p_0}{2} \cdot \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{p_0}{2} R_s = \frac{0{,}8}{2} \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 = 560 \text{ N/mm}$$

Înlocuind în relația lui Laplace rezultă:

$$N_\theta = p_0 R_s - N_\varphi = \frac{p_0}{2} R_s = 560 \text{ N/mm}.$$

Deoarece pentru fundurile sferice al rezervorului $N_\varphi = N_\theta = 560$ N/mm^2, din condiția de rezistență (9.11) rezultă

$$t = \frac{560}{0{,}8 \cdot 120} = 5{,}83 \text{ mm}.$$

Grosimea efectivă a peretelui fundurilor rezervorului, ținând seama de adaosul tehnologic (t_t) şi de coroziune (t_c) este $s = 8$ mm.

Pentru mantaua cilindrică raza de curbură a meridianului este $r_1 = \infty$, iar cea a paralelului este $r_2 = R$. Formula lui Laplace devine:

$$N_\theta = p_0 R = 0{,}8 \cdot 10^3 = 800 \text{ N/mm}.$$

Efectuând o secțiune în zona cilindrică a rezervorului (fig. 9.9, *c*) şi proiectând toate forțele pe axa de simetrie se obține:

$$N_\varphi \cdot 2\pi R - p_0 \pi R^2 = 0 \Rightarrow N_\varphi = \frac{p_0}{2} R = \frac{0{,}8}{2} 1000 = 400 \text{ N/mm}.$$

Din condiția de rezistență (9.11) se determină grosimea de calcul a peretelui mantalei:

$$t = \frac{800}{0{,}8 \cdot 120} = 8{,}33 \text{ mm},$$

care majorată cu adaosul tehnologic (t_t) şi cel de coroziune (t_c), conduce la $s = 12$ mm.

Izolând zona de racordare (fig. 9.9, *d*) se determină efortul în inelul de rigidizare:

$$N_i = -HR = -(N_\varphi^{sfer} \cos\varphi_1)R = -N_\varphi^{sfer} \frac{R_s - h}{R_s} R = -560 \cdot \frac{1{,}4 - 0{,}42}{1{,}4} \cdot 1 \cdot 10^3 = 392 \text{ kN}.$$

P.9.3. Rezervorul din figura 9.10, este format dintr-o parte cilindrică, o parte conică şi un capac sferic. Rezervorul este plin până la nivelul inelului de rigidizare $A - A$ cu un lichid de greutate specifică $\gamma = 12$ kN/m^3, iar în calota sferică se află un gaz la presiunea $p_0 = 4$ bar. Să se dimensioneze pereții din tole de oțel sudate ($\sigma_a = 100$ N/mm^2, $\beta = 0{,}8$) după teoria a III-a de rezistență (T_τ) şi să se calculeze eforturile în inelele de rigidizare $A - A$ şi $B - B$.

Dimensionarea pereților implică mai întâi determinarea eforturilor secționale N_φ şi N_θ pentru cele trei zone: sferică, cilindrică, respectiv conică.

Zona sferică

Deoarece pentru un înveliş sferic $r_1 = r_2 = R_s$ formula lui Laplace capătă forma:

$$N_\varphi^{sf} + N_\varphi^{sf} = p_0 R_s$$

în care

$$R_s = \frac{R^2 + h_1^2}{2h_1} = \frac{1{,}4^2 + 1}{2 \cdot 1} = 1{,}48 \text{ m}.$$

Pentru determinarea lui N_φ se face secțiunea $I - I$ reprezentată în figura 9.10, *c*. Neglijând greutatea gazului, din ecuație de proiecție pe axa de simetrie:

$$(N_\varphi^{sf} \cdot \sin\varphi) \cdot 2\pi r - p_0 r^2 = 0$$

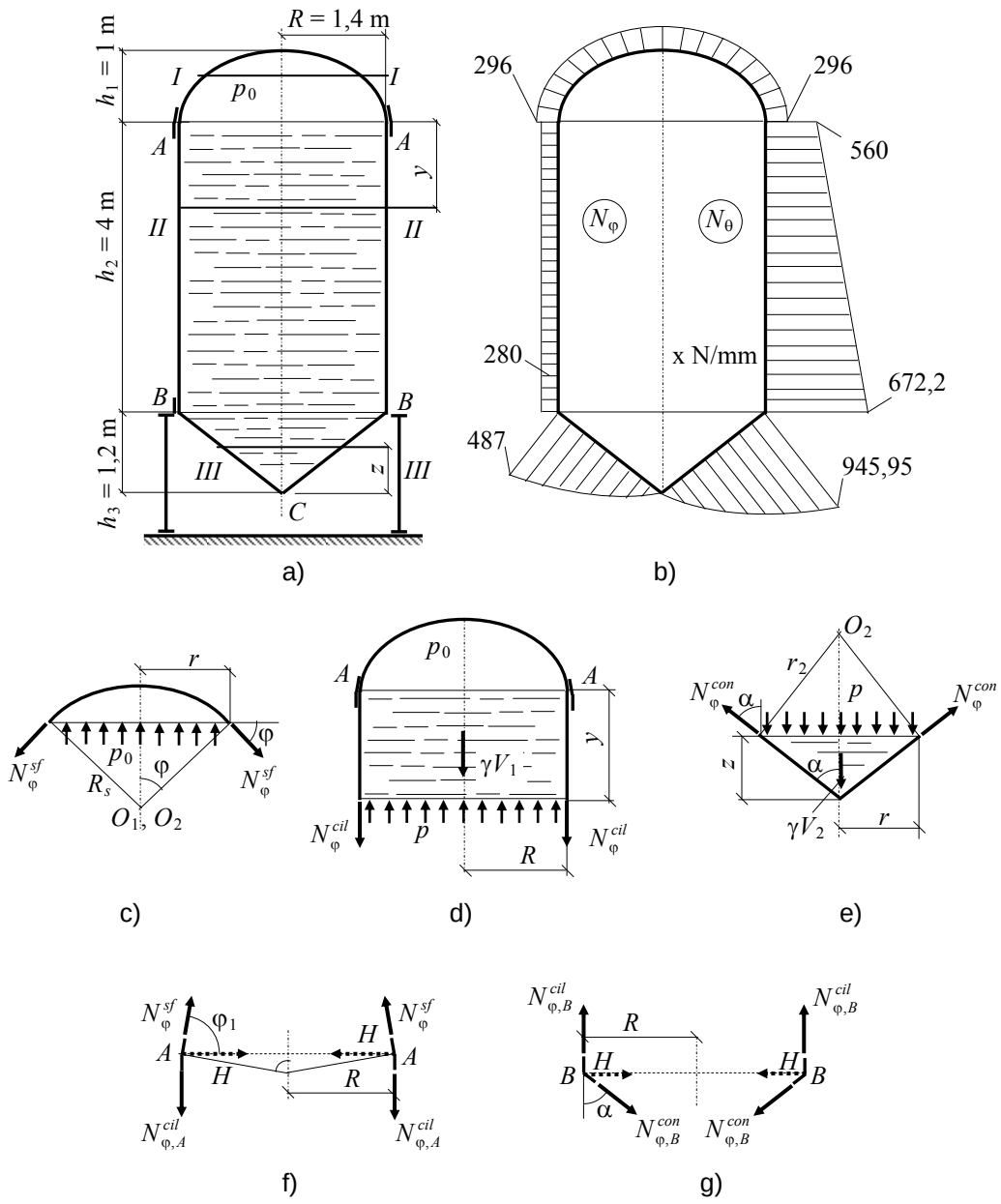


Fig. 9.10.

rezultă:

$$N_{\varphi}^{sf} = \frac{p_0}{2} \cdot \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{p_0 R_s}{2}.$$

Înlocuind în formula lui Laplace se obține

$$N_{\theta}^{sf} = N_{\varphi}^{sf} = \frac{p_0 R_s}{2} = \frac{0{,}4 \cdot 1{,}48 \cdot 10^3}{2} = 296 \text{ N/mm}.$$

Reprezentarea celor două eforturi secționale – constante – este prezentată în figura 9.10, *b*.

Deoarece $N_{\theta}^{sf} = N_{\varphi}^{sf} = 296$ N/mm

$$\sigma_{\max}^{sf} = \frac{N_{\varphi}^{sf}}{t^{sf}} \le \beta\sigma_a$$

de unde rezultă grosimea de calcul a peretelui zonei sferice,

$$t^{sf} = \frac{N_{\varphi}^{sf}}{\beta\sigma_a} = \frac{296}{0.8 \cdot 100} = 3{,}7.$$

Ținând seama de adaosul pentru coroziune $t_c = 1{,}3$ mm rezultă $s^{sf} = 5$ mm.

<u>Zona cilindrică</u>

Pentru mantaua cilindrică $r_1 = \infty$; $r_2 = R$. Din formula (9.5) rezultă;

$$N_{\theta}^{cil} = pR = (p_0 + \gamma y)R$$

deoarece presiunea p la cota y este $p = p_0 + \gamma y$. Se constată că N_{θ}^{cil} are o variație liniară între valorile:

$$N_{\theta,A}^{cil}\Big|_{y=0} = p_0 R = 0{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 = 560 \text{ N/mm},$$

$$N_{\theta,B}^{cil}\Big|_{y=h2} = (p_0 + \gamma h_2)R = (0{,}4 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^3) \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 = 672{,}2 \text{ N/mm}.$$

Pentru determinarea lui N_{φ}^{cil} se face secțiunea *II – II* şi se izolează partea superioară pentru că nu are legături cu terenul şi deci, nu apar necunoscute suplimentare (fig. 9.10, *d*).

Din ecuația de proiecție pe axul de revoluție

$$N_{\varphi}^{cil} \cdot 2\pi R^2 + \gamma V_1 - p\pi R^2 = 0$$

rezultă

$$N_{\varphi}^{cil} = \frac{p\pi R^2 - \gamma\pi R^2 y}{2\pi R} = \frac{p_0 + \gamma y - \gamma y}{2} R = \frac{p_0 R}{2} = \frac{0{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3}{2} = 280 \text{ N/mm}.$$

Variația celor două eforturi secționale este redată în figura 9.10, *b*. Deoarece $N_{\theta,\max}^{cil} > N_{\varphi,\max}^{cil}$ din condiția de rezistență (9.11) rezultă

$$t^{cil} = \frac{N_{\theta,\max}^{cil}}{\beta\sigma_a} = \frac{672{,}2}{0{,}8 \cdot 100} = 8{,}4 \text{ mm}$$

Ținând sema de adaosul de coroziune t_c = 1,6 mm rezultă s^{cil} = 9 mm.

Zona conică

Se face secțiunea *III – III* la cota *z* de punctul *C* (fig. 9.10, *e*). Din ecuația de proiecție pe axa de simetrie

$$(N_\varphi^{con} \cos\alpha) \cdot 2\pi r - p\pi r^2 - \gamma V_2 = 0$$

rezultă

$$N_\varphi^{con} = \frac{p\pi r^2 - \gamma V_2}{2\pi r \cos\alpha} .$$

Deoarece

$$r = \frac{R}{h_3} z ; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h_3}\right)^2}} ; \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 z ; \quad p = \gamma[p_0 + (h_2 + h_3 - z)] ;$$

se obține

$$N_\varphi^{con} = \frac{1}{2}\frac{R}{h_3} z \left[p_0 + \gamma\left(h_2 + h_3 - \frac{2}{3} z \right)\right] \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h_3}\right)^2} .$$

Pentru

$$z = 0 \Rightarrow N_{\varphi,C}^{con} = 0 ;$$

$$z = h_3 \Rightarrow N_{\varphi,B}^{con} = \frac{1}{2} R \left[p_0 + \gamma\left(h_2 + \frac{h_3}{3} \right)\right] \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h_3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 \left[0{,}4 + 12 \cdot 10^{-6} \left(4 + \frac{1{,}2}{3} \right) \cdot 10^3 \right] \sqrt{1 + \left(\frac{1{,}4}{1{,}2}\right)^2} = 487 \text{ N/mm}.$$

Variația efortului secțional N_φ^{con} este redată în figura 9.10, *b*.

Se constată că pentru zona conică $r_1 = \infty$, iar

$$r_2 = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{R}{h_3} z \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h_3}\right)^2} ,$$

caz în care din formula lui Laplace (9.5) rezultă

$$N_\theta^{con} = p \cdot r_2 = [p_0 + \gamma(h_2 + h_3 - z)]\frac{R}{h_3} z\sqrt{1+\left(\frac{R}{h_3}\right)^2}$$

Pentru

$$z = 0 \Rightarrow N_{\theta,C}^{con} = 0;$$

$$z = h_3 \Rightarrow N_{\theta,B}^{con} = R[p_0 + \gamma h_2]\sqrt{1+\left(\frac{R}{h_3}\right)^2} =$$

$$= 1{,}4 \cdot 10^3 \left[0{,}4 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^3\right]\sqrt{1+\left(\frac{1{,}4}{1{,}2}\right)^2} = 945{,}95 \text{ N/mm}.$$

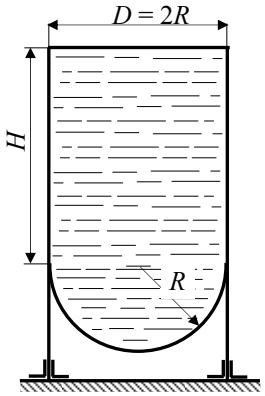


Fig. 11.

Variația efortului secțional N_θ^{con} este redată în figura 9.10, *b*.

Deoarece $N_{\theta,\max}^{con} = N_{\varphi,\max}^{con}$, din condiția de rezistență (9.11) se determină grosimea de calcul a peretelui zonei conice:

$$t^{con} = \frac{N_{\theta,\max}^{con}}{\beta\sigma_a} = \frac{945{,}95}{0{,}8 \cdot 100} = 11{,}8 \text{ mm}.$$

Ținând seama de adaosul de coroziune t_c = 1,2 mm se obține s^{con} = 13 mm.

Pentru calculul eforturilor în inelele de rigidizare se izolează acestea şi se introduc eforturile secționale. În conformitate cu figura 9.10, *f* rezultă:

$$N_i^{A-A} = -HR = -(N_\varphi^{sf}\cos\varphi_1)R = -N_\varphi^{sf}\frac{R_s - h_1}{R_s}R = -296\frac{1{,}48-1}{1{,}48}\cdot 1400 = -134{,}4 \text{ kN}.$$

Pentru inelul *B*- *B* (fig. 9.10, *g*)

$$N_i^{b-B} = -HR = -(N_{\varphi,B}^{con}\sin\alpha)R = -487\frac{\frac{1{,}4}{1{,}2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1{,}4}{1{,}2}\right)^2}}\cdot 1400 = -527{,}4 \text{ kN}.$$

Probleme suplimentare

P.9.5. Să se determine eforturile secționale N_φ şi N_q în pereții rezervorului cilindric cu fund sferic din figura 9.11. Diametrul vasului este $D = 2R$ = 3,6 m, înălțimea H = 6 m, iar lichidul are greutatea specifică γ = 15 kN/m^3.

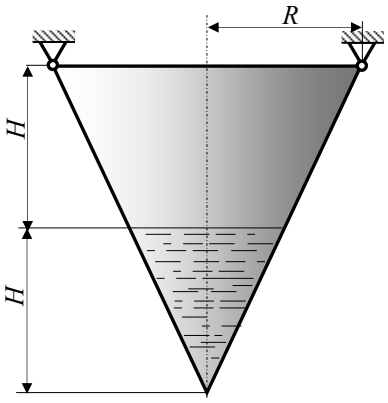


Fig. 9.12.

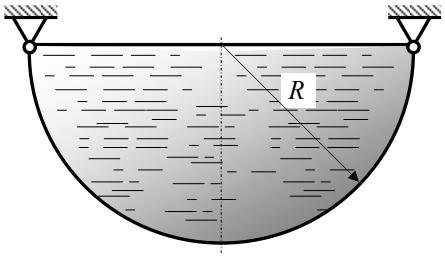


Fig. 9.13.

P.9.4. Un vas conic de rază R =1,8 m şi înălțime $2H$ = 5 m este plin pe jumătate cu un lichid de greutate specifică γ = 16 kN/m^3 (fig. 9.12). Să se dimensioneze peretele vasului cunoscând că este confecționat din virole sudate cap la cap (σ_a = 120 N/mm^2, β = 0,8).

P.9.5. Un rezervor semisferic de rază R = 1m şi este plin cu apă (γ = 10 kN/m^3) . Vasul este suspendat la partea superioară aşa cum se poate vedea în figura 9.13. Să se determine eforturile secționale N_φ şi N_q şi să se dimensioneze peretele vasului daca σ_a = 100 N/mm^2, iar β = 0,8.

P.9.7. Să se verifice tensiunile din pereții unui vas cilindric cu diametrul D = 2,8 m, ştiind că grosimea tablei este s = 10 mm, presiunea interioară p = 1,2 MPa, iar tensiunea admisibilă σ_a = 180 N/mm^2. Vasul are la capete două capace plate.

10. SOLCITĀRI VARIABILE

În capitolul 1, în cadrul clasificării încarcărilor, s-a precizat că, în funcție de efectele interne pe care le induc, încărcările se împart în două categorii: încărcări constante – la care efectele interne sunt aceleaşi pe toată durata solicitării – şi încărcări variabile – la care efectele interne, produse de acestea, variază în timp.

Solicitările care induc tensiuni (σ, τ) variabile în timp, periodic, între o limită inferioară şi alta superioară, sunt denumite *solicitări variabile*.

Solicitările variabile întâlnite în exploatarea unor piese sau structuri pot fi:

– solicitări rezultate din aplicarea sistemelor de forțe, care apar de exemplu în cazul podurilor, macaralelor, al pieselor în mişcare din cadrul maşinilor, locomotivelor, sau din aplicarea unor presiuni variabile, întâlnite la recipiente, conducte, containere etc.;

– solicitări produse de variațiile de temperatură, care apar de exemplu la echipamentele care lucrează cu materiale sau fluide calde;

– vibrații ale sistemelor de transmisii mecanice sau datorate unor forțe aerodinamice sau hidrodinamice;

– solicitări rezultate din condiții de mediu, cum sunt cele generate de forța vântului sau a valurilor în cazul navelor, platformelor de foraj, pilonilor de susținere ai podurilor, recipientelor de tip coloană etc.

Ruperea pieselor supuse solicitărilor variabile se produce la tensiuni mult mai mici decât în cazul solicitărilor statice. Acestui fenomen i s-a dat numele de *oboseala materialului*. Atunci când o piesă dintr-un material ductil este solicitată static, ruperea finală este precedată de deformații plastice mari. În cazul în care piesa respectivă este supusă unor solicitări variabile ruperea se produce la tensiuni mai mici decât limita de curgere şi aparent fără deformații plastice. La început apar una sau mai multe fisuri de dimensiuni mici, care, sub acțiunea solicitărilor variabile, se dezvoltă pană când, la un moment dat, se produce ruperea finală. Din această cauză *oboseala materialului* poate fi definită ca *un proces de inițiere şi propagare stabilă a uneia sau mai multor fisuri ca rezultat al aplicării repetate a solicitării, fiecare aplicare fiind, prin ea însăşi, insuficientă pentru a produce ruperea*.

Solicitările variabile pot avea un caracter *determinist* sau *aleator*. În cazul solicitărilor deterministe se pot stabili anumite relaţii care pot caracteriza evoluţia lor la un moment dat. Solicitărilor aleatoare nu se pot exprima prin relaţii analitice din care cauză, evoluţia lor în timp se studiază prin înregistrări; prin calculul probabilităţilor se pot face apoi estimări privind comportarea în viitor a pieselor supuse la astfel de solicitări.

10.1. CICLURI DE SOLICITĂRI VARIABILE

Dintre solicitările deterministe, cele mai frecvente sunt solicitările periodice cu variaţie continuă. Aceste solicitări variabile pot fi exprimate prin intermediul unor funcţii cu variaţie ciclică în timp, definite prin mărimile caracteristice unui ciclu de referinţă şi prin numărul de repetări al acestuia (fig.10.1).

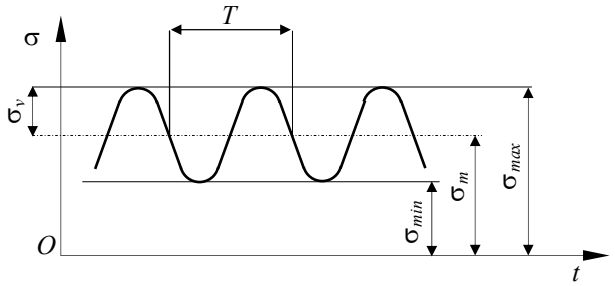


Fig. 10.1.

Ciclul de solicitare reprezintă totalitatea valorilor pe care le ia tensiunea, într-un punct al piesei, în intervalul de timp de referinţă. Timpul de referinţă *T*, dintre două valori consecutive, de acelaşi semn ale tensiunii, poartă numele de *perioadă*. În decursul unui ciclu, tensiunea trece o singură dată printr-o valoare maximă, numită tensiune maximă σ_{max}, şi o valoare minimă σ_{min} numită tensiune minimă.

În funcţie de σ_{max} şi σ_{min} se definesc:

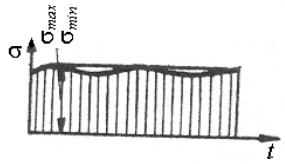
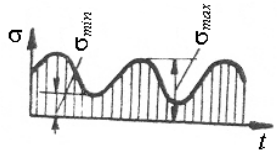
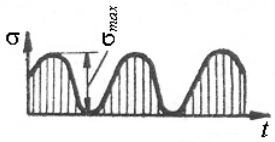
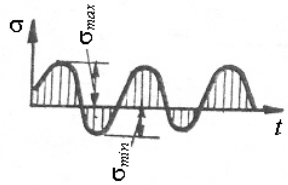
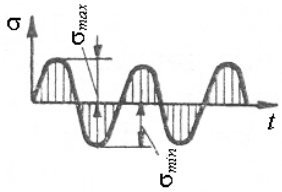
– tensiunea medie:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \tag{10.1}$$

– amplitudinea tensiunii, reprezentând componenta alternantă:

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}; \tag{10.2}$$

Tabelul 10.1.

Nr. crt.	Ciclul	σ_{max} , σ_{min}	σ_m , σ_v	R
Cicluri ondulante (σ_{max} şi σ_{min} au acelaşi semn)				
1	 Ciclul static pozitiv	$\sigma_{max} = \sigma_{min} > 0$	$\sigma_m = \sigma_{max} = \sigma_{min}$ $\sigma_v = 0$	$R = +1$
2	 Ciclul ondulant pozitiv	$\sigma_{max} > 0$ $\sigma_{min} > 0$	$\sigma_m > 0$ $\sigma_v \neq 0$	$0 < R < +1$
3	 Ciclul pulsator pozitiv	$\sigma_{max} > 0$ $\sigma_{min} = 0$	$\sigma_m = \sigma_v = \frac{1}{2}\sigma_{max}$	$R = 0$
Cicluri alternante (σ_{max} şi σ_{min} au semne contrarii)				
4	 Ciclul alternant	$\sigma_{max} > 0$ $\sigma_{min} < 0$ $\sigma_{max} \geq \lvert\sigma min\rvert$	$\sigma_m > 0$ $\sigma_v \neq 0$	$-1 < R < 0$
5	 Ciclul alternant simetric	$\sigma_{max} = -\sigma_{min} > 0$ $\sigma_{min} < 0$	$\sigma_m = 0$ $\sigma_v = \sigma_{max}$	$R = -1$

– coeficientul de asimetrie al ciclului:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}; \qquad (10.3)$$

– caracteristica ciclului:

$$\rho = \frac{\sigma_v}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1-R}{1+R}. \qquad (10.4)$$

Întrucât, între mărimile definite anterior există diferite relații, în parte precizate, se constată că un ciclu este complet caracterizat prin două astfel de marimi: (σ_{max}; σ_{min})

După mărimile şi semnele pe care le au σ_{max} şi σ_{min}, se disting diferite tipuri de cicluri de solicitări variabile care sunt redate în tabelul 10.1.

10.2. REZISTENŢA LA OBOSEALĂ

Caracteristica mecanică a unui material din care este confecționată o piesă supusă la solicitări variabile, este *rezistența la oboseală*.

Rezistența la oboseală se determină experimental şi depinde de coeficientul de asimetrie al ciclului *R*.

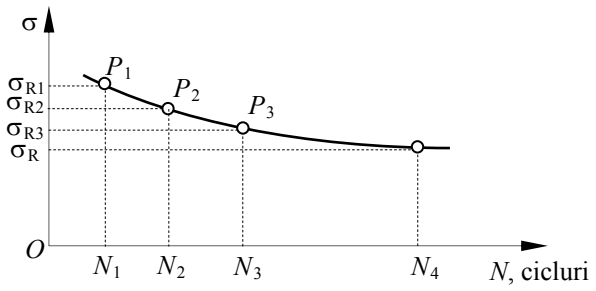


Fig. 10.2.

În acest scop, conform STAS 5878-69, se încearcă minim opt epruvete identice, la o solicitare variabilă cu acelaşi coeficient de asimetrie *R* şi se înscriu pe diagramă diferitele seturi de valori (σ_{Ri}, N_i); σ_R este intensitatea maximă – în valoarea absolută – a tensiunii la care se rupe epruveta după *N* cicluri, cu coeficientul de asimetrie *R*. În felul acesta se trasează punctele P_i (i = 1,2, ..., 8), prin unirea cărora se obține *curba de durabilitate*, curbă care este cunoscută sub numele de curba lui *Wöhler* (fig. 10.2). Valoarea către care tinde asimptotic această curbă este rezistența la oboseală σ_R, pentru solicitarea variabilă cu coeficientul de asimetrie *R*. Rezistența la oboseală pentru cilul alternat simetric se

va nota σ_{-1}, pentru ciclul pulsator, cu σ_0, iar pentru ciclul static σ_{+1} (σ_{+1} corespunde rezistenței la rupere la solicitarea statică).

În mod practic, σ_R reprezintă valoare maximă a tensiunii de solicitare a epruvetei la care aceasta nu se rupe după un număr convențional de cicluri N_0. Pentru oțeluri se ia $N_0 = 10^6 \ldots 10^7$ cicluri, iar pentru aliaje uşoare se ia $N_0 = 5 \cdot 10^7 \ldots 10^8$ cicluri.

În cele mai multe cazuri punctele P_i obținute experimental prezintă o dispersie destul de mare astfel încât curba de durabilitate nu este uşor de definit. Din această cauză pentru determinări precise este necesar să se încerce un număr relativ mare de epruvete – câteva zeci . Rezultatele experimentale se prelucrează statistic şi se trasează curbe care indică *probabilitatea de rupere*.

Dificultăți la determinarea rezistenței la oboseală se întâmpină şi în ceea ce priveşte metodologia experimentală atunci când se studiază şi altfel de cicluri decât cel alternant simetric.

10.3. RUPEREA PRIN OBOSEALĂ

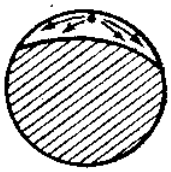
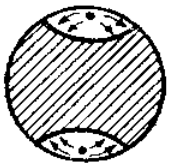
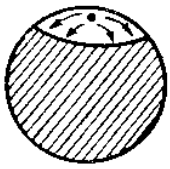
De mai mult de un secol, de când s-a constat fenomenul de oboseală, s-a căutat să se explice modul de producere a ruperii prin oboseală şi cum aceasta diferă de ruperea la solicitari statice.

Din analiza comparativă dintre secțiunea unei bare ruptă la oboseală şi una aparținând unei bare solicitată static rezultă deosebiri semnificative. În cazul barei rupte prin oboseală se disting două zone: una lucioasă, cauzată de frecarea materialului în timpul propagării fisurii şi una grăunțoasă, în zona în care are loc, brusc, ruperea finală. Procesul de rupere prin oboseală este inițiat prin apariția unei microfisuri, care prin extindere formează o fisură, a cărei poziție poate fi uşor identificată în secțiunea piesei rupte. Când viteza de propagare a fisurii nu este constantă, pe suprafața lucioasă se observă anumite linii de repaus care marchează întreruperile de propagare a fisurii.

Aspectul ruperii la oboseală depinde şi de natura ciclului de solicitare. În tabelul 10.2 sunt redate diferite secțiuni de rupere pentru diferite solicitări şi diferite tipuri de peruvete. Săgețile indică direcțiile de propagare a fisurilor, iar zonele haşurate reprezintă zonele mate (cu asperități) corespunzătoare zonelor active din momentul ruperii.

Pentru solicitările de încovoiere rotativă sau întindere-compresiune, de obicei există o singură fisură inițială. În cazul încovoierii plane apar două fisuri dispuse față în față. Atunci când valoarea maximă a tensiunii este mică (solicitare mică) fisura se propagă aproape în toată secțiunea, zona ruperii bruşte (cea haşurată) fiind mică.

Tabelul 10.2.

Felul solicitării	Epruvetă netedă		Epruvetă cu concentrator inelar
	Solicitare mică	Solicitare mare	Solicitare mică
Încovoiere rotativă			
Încovoiere plană			
Întindere-compresiune			

Trebuie remarcat faptul că în cazul ruperii prin oboseală nu apare acea gâtuire specifică ruperii statice a materialelor tenace, ceea ce conduce la concluzia că ruperea prin oboseală are carater fragil.

10.4. FACTORI CARE INFLUENŢEAZĂ REZISTENŢA LA OBOSEALĂ

Rezistența la oboseală este o mărime complexă care depinde de o serie întreagă de factori. Unii dintre aceştia pot fi luați în considerare în calculele de rezistență prin intermediul unor coeficienți; de alții se poate ține seama la alegerea materialului, a formei piesei şi a tehnologiei de fabricație.

Se poate face o sistematizare a acestor factorii astfel:

– factori constructivi;
– factori tehnologici;
– factori de exploatare.

10.4.1. FACTORI CONSTRUCTIVI

În piesele de tip bară, distribuția tensiunilor dată de rezistența materialelor este stabilită în ipoteza că secțiunea este constantă, iar abaterile de la această distribuție sunt nesemnificative în cazul în care secțiunea barei are o variație lentă. În practică sunt puține cazurile în care piesele au secțiuni constante. Schimbările bruşte ale secțiunii transversale, cum sunt cele determinate de trecerea de la o secțiune la alta, de găuri sau crestături, produc în zona lor o modificare semnificativă a legii de distribuție a tensiunilor şi deformațiilor specifice. La materiale ductile, în astfel de zone în care se produc concentrări de tensiuni, de regulă la suprafața piesei, valoarea acestora poate depăşi limita de curgere a materialului. Ca urmare viața pieselor este redusă semnificativ.

În calculele inginereşti astfel de fenomene se iau în considerare prin intermediul unor *factori constructivi*, care cuprind:

a) *Forma piesei şi modul de asamblare* (cu celelalte piese ale construcției), care necesitând schimbări bruşte de secțiune constituie concentratori de tensiuni. Aceşti factori se ia în considerare prin coeficientul:

$$\beta_k = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1,k})_{d_0}} > 1, \tag{10.5}$$

unde $(\sigma_{-1})_{d_0}$ este rezistența la oboseală – în ciclul alternant simetric – a unei epruvete cu diametrul standardizat d_0, ideală, adică fără incluziuni străine şi cu suprafața perfect lustruită şi lipsită de concentratori de tensiuni; $(\sigma_{-1,k})_{d_0}$ este rezistența la oboseală – în ciclul alternant simetric – a unei epruvete cu diametrul standardizat d_0, dar având forma şi modul de asamblare a piesei reale (la care apare deci concentratorul de tensiuni), dar cu suprafața perfect lustruită şi fără incluziuni de material străin.

b) *Dimensiunile piesei*. Acestea se iau în considerare prin coeficientul:

$$\varepsilon_k = \frac{(\sigma_{-1,k})_d}{(\sigma_{-1,k})_{d_0}} = \frac{(\sigma_{-1,k})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \cdot \beta_k < 1, \tag{10.6}$$

unde $(\sigma_{-1,k})_d$ este rezistența la oboseală, în ciclul alternant simetric, a piesei, având forma, modul de asamblare şi dimensiunile piesei reale, dar cu suprafața perfect lucie şi fără incluziuni de material străin. Acest coeficient este subunitar deoarece la piese cu dimensiuni mai mari probabilitatea existenței unor microfisuri este mai mare decât la piese cu dimensiuni mici.

10.4.2. FACTORI TEHNOLOGICI

Factorii tehnologici iau în considerare *calitatea şi omogenitatea materialului* precum şi *gradul de prelucrare al suprafeţei piesei*.

Rezistenţa la oboseală, ca şi celelalte caracteristici mecanice, diferă de la un material la altul. Din această cauză datele informative despre caracteristicile mecanice ale diferitelor materiale, cuprinse în normative şi standarde, conţin şi valoarea rezistenţei la oboseală, determinată pe epruvete netede (de obicei standardizate) cu diametrul în jur de 8 – 10 mm.

Dintre factorii tehnologici care au o influenţă negativă asupra rezistenţei la oboseală se menţionează: structura neuniformă a materialului, structura cu granulaţie mare, existenţa crustei de turnare, forjare, laminare, tratamente termice sau neuniforme. În schimb tratamentele termice corecte, crearea de fibre longitudinale prin forjare sau laminare, ca şi tratamentele superficiale au efect favorabil asupra rezistenţei la oboseală.

Un alt factor esenţial care influenţează rezistenţa la oboseală îl constituie starea suprafeţei piesei. Dintre cauzele care fac ca starea suprafeţei piesei să influenţeze puternic rezistenţa la oboseală se menţionează:

– suprafaţa are întotdeauna zgârieturi rezultate din prelucrare, care constituie amorse de fisuri;

– la suprafaţa piesei grăunţii cristalini sunt în parte distruşi din cauza prelucrării, fapt ce conduce la o slăbire a rezistenţei materialului;

– la încovoiere şi răsucire, tensiunile maxime se dezvoltă la suprafaţa pieselor.

Factorii tehnologici se iau în considerare prin coeficientul:

$$\gamma_k = \frac{(\sigma_{-1,k})_{d,s}}{(\sigma_{-1,k})_d} = \frac{(\sigma_{-1,k})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \cdot \frac{\beta_k}{\varepsilon_k} < 1, \tag{10.7}$$

unde $(\sigma_{-1,k})_{d,s}$ este rezistenţa la oboseală în ciclul alternant simetric a piesei reale: σ'_{-1}. Acest coeficient este subunitar deoarece rezistenţa la oboseală a piesei cu microfisuri exterioare şi interioare este mai mică decât a piesei perfect lustruite şi fără incluziuni străine de material.

Din relaţia (10.7) rezultă ca rezistenţa la oboseală, în ciclul alternant simetric, a piesei reale este:

$$\sigma'_{-1} = \frac{\gamma_k \cdot \varepsilon_k}{\beta_k} \cdot \sigma_{-1}. \tag{10.8}$$

10.4.3. FACTORI DE EXPLOATARE

În aceşti factori sunt cuprinşi:

a) *Condițiile în care funcționează piesa*. Experiențele au arătat că rezistența la oboseală este influențată defavorabil de existența suprasolicitărilor, adică a unor solicitări de durată limitată dar având o valoare mai mare decât rezistența la oboseală. Cu cât solicitarea inițială a piesei este mai mare sau de mai lungă durată cu atât rezistența la oboseală scade mai mult. De asemenea rezistența la oboseală scade la temperaturi înalte, fapt pentru care sunt necesare determinări ale rezistenței la oboseală la temperaturile respective. Tipul de solicitare (de întindere, încovoiere sau de torsiune) – care este prins în factorii β_k, ε_k, γ_k – influențează, de asemenea, rezistența la oboseală.

b) *Influența mediului*. S-a constatat că rezistența la oboseală se diminuează foarte mult atunci când piesa lucrează într-un mediu corosiv. Acest efect se combate prin acoperiri anticorosive, sau prin alegerea de materiale care rezistă mai bine la agenții corosivi.

c) *Gradul de asimetrie al ciclului*. Acest factor, în comparație cu primii doi, este factorul principal care influențează în mod decisiv rezistența la oboseală. Toți ceilalți factori se iau în considerare în mod global. Influența gradului de simetrie este pusă în evidență prin intermediul unei diagrame, denumită *diagrama ciclurilor limită* care stabileşte legătura între două mărimi caracteristice ale ciclului, la limită, adică în momentul în care se produce ruperea prin oboseală.

10.5. DIAGRAMA CICLURILOR LIMITĂ

Diagrama ciclurilor limită, indiferent de mărimile caracteristice ale ciclului în care este exprimată, se determină numai pe cale experimentală. Trasarea unei astfel de diagrame necesită un număr mare de determinări experimentale şi ea reprezintă variația rezistenței la oboseală cu coeficientul de asimetrie al ciclului de solicitare, pentru o piesă dată.

Într-un sistem de axe de coordonate σ_m, σ_v (fig. 10.3) ciclul de solicitare variabilă dintr-o piesă se poate reprezenta printr-un punct M de coordonate (σ_m,σ_v). Între panta dreptei OM şi coeficientul de asimetrie R al ciclului de solicitare corespunzător punctului M există relația:

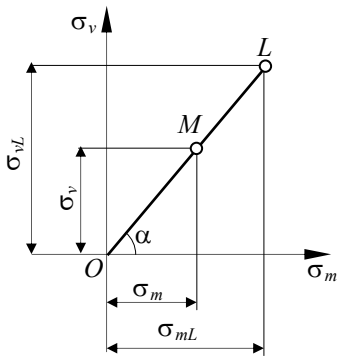


Fig. 10.3.

$$\tan\alpha = \frac{\sigma_v}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}. \qquad (10.9).$$

În baza relațiilor (10.1) şi (10.2), suma coordonatelor punctului *M* reprezintă tensiunea σ_{max} a cilului. Prelungind dreapta *OM*, se găseşte un punct *L*, corespunzător unui ciclu limită la care tensiunea maximă este egală cu rezistența la oboseală a materialului, corespunzătoare ciclului cu coeficientul de asimetrie dat:

$$\sigma_{maxL} = \sigma_{mL} + \sigma_{vL}. \qquad (10.10)$$

Locul geometric al punctelor *L* reprezintă *diagrama rezistențelor la oboseală* sau *diagrama ciclurilor limită*.

10.5.1. DIAGRAMA HAIGH

Această diagramă reprezintă relația grafică între σ_v şi σ_m la limită, adică:

$$\sigma_{vL} = f(\sigma_{mL}). \qquad (10.11)$$

O astfel de diagramă este reprezentată în figura 10.4, *a*. Pe ea se disting următoarele puncte caracteristice:

– punctul $A(0,\sigma_{-1})$, care reprezintă ciclul limită alternant simetric;

– punctul $B(\sigma_{+1},0)$, care reprezintă ciclul static la limită (ruperea la solicitarea statică);

– punctul $P(\sigma_0/2, \sigma_0/2)$, care reprezintă ciclul pulsator, la limită.

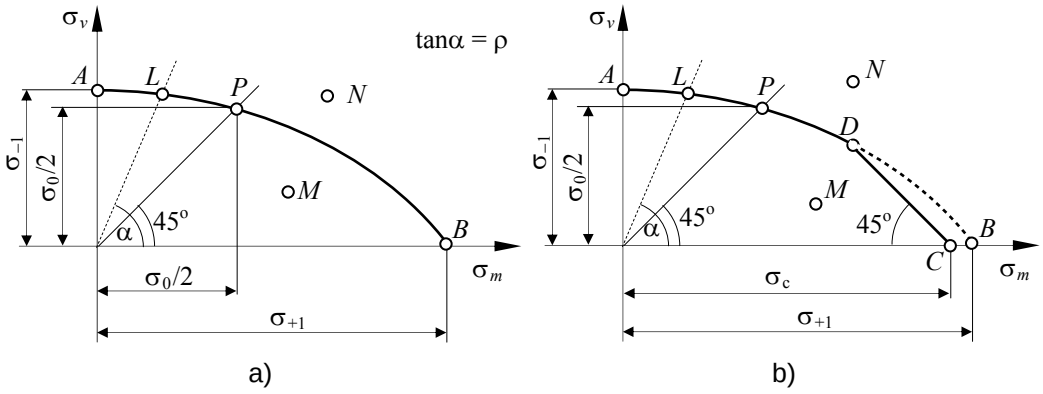


Fig. 10.4.

Un punct oarecare pe curbă $L(\sigma_{vL}\ ,\ \sigma_{mL})$ reprezintă un ciclu limită (deci la care s-a produs ruperea prin oboseală, a cărui caracteristică este dată de relația (10): $\rho = \sigma_{vL}/\sigma_{mL}$ şi al cărui coeficient de asimetrie rezultă din relația $\rho = (1-R)/(1+R)$.

Un punct oarecare $M(\sigma_m,\sigma_v)$, care se găseşte în interiorul suprafeței diagramei, reprezintă o solicitare ciclică a cărei caracteristică este $\rho = \sigma_v/\sigma_m$, dar care nu a atins limita, deci la care epruveta nu se rupe.

În cazul materialelor tenace:

$$\sigma_{maxL} = \sigma_{mL} + \sigma_{vL} = \sigma_c, \tag{10.12}$$

unde σ_c reprezintă limita de curgere. Din această cauză diagrama ciclurilor limită trebuie limitată printr-o dreaptă la 45°, a cărei ecuație este (10.12) şi reprezentată pe figura 10.4, *b* prin dreapta *CD*.

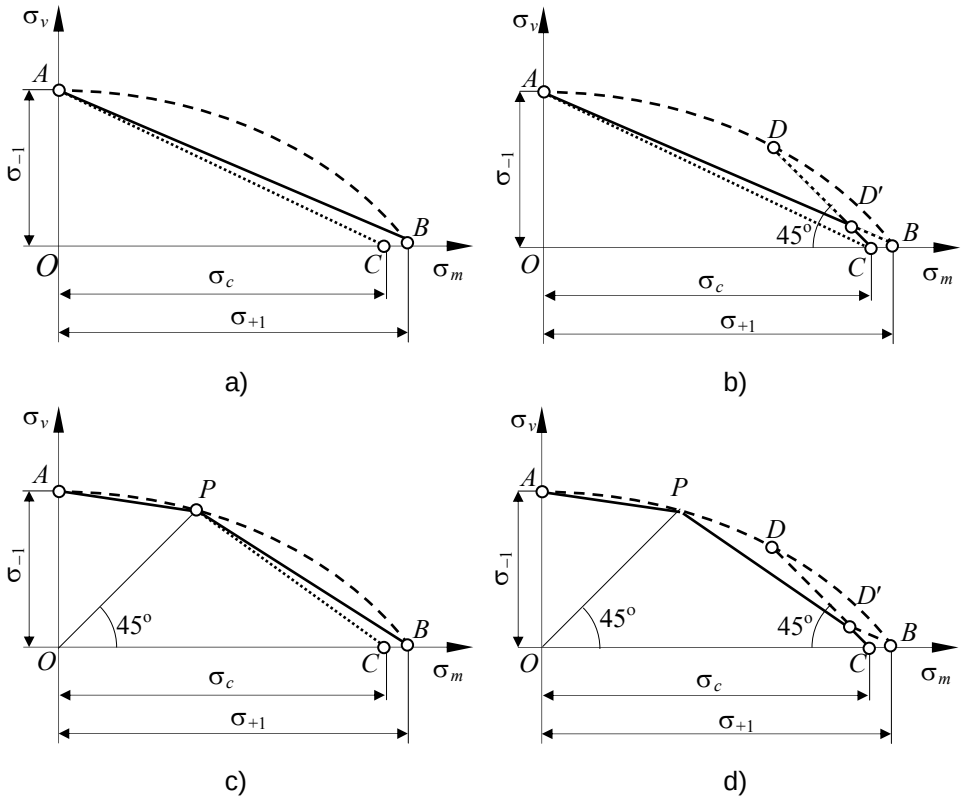


Fig. 10.5.

Deoarece pentru fiecare punct *L* este necesară o diagramă Wohler (fig. 10.2), o asemenea diagramă nu poate fi trasată exact, din care cauză s-a recurs la schematizarea ei. S-au propus doua schematizări, una de către Soderberg (SUA),

cealaltă de către Serensen (RFR).

Schematizarea propusă de Soderberg constă în dreapta *AB* pentru materiale fragile şi dreapta *AC*, pentru materialele tenace (fig. 10.5, *a*). Pentru materialele tenace, o diagramă mai puţin restrictivă este formată din dreptele *AB* şi *CD* care se intersectează în *D′* (fig. 10.5, *b*).

Schematizarea propusă de Serensen se bazează pe determinarea lui σ_0 şi constă în două drepte: *AP* şi *PB* pentru materialele fragile, respectiv *AP* şi *PC* pentru materialele tenace (fig. 10.5, *c*). Pentru materialele tenace, o diagramă mai puţin restrictivă este formată din dreptele *AP*, *PD′* şi *D′C*, unde *D′* reprezintă intersecţia dreptelor *PB* şi *CD* (fig. 10.5, *d*).

10.5.2. DIAGRAMA SCHMIDT

Această diagramă reprezintă grafic relaţia, care se stabileşte la limită, intre σ_{max} şi σ_m, respectiv σ_{min} şi σ_m

$$\sigma_{maxL} = f(\sigma_{mL});\ \sigma_{minL} = g(\sigma_{mL}). \qquad (10.13)$$

În această diagramă fiecare ciclu limită este reprezentat prin două puncte. Astfel ciclul alternant simetric este reprezentat prin punctele $A(0, \sigma_{-1})$ şi $A'(0, -\sigma_{-1})$ (fig. 10.6,*a*). Ciclul pulsator este reprezentat prin punctele $P(\sigma_0/2,0)$ şi P' $(\sigma_0/2,\sigma_0/2)$. Ciclul static este reprezentat prin punctele *B* şi *B′* care coincid

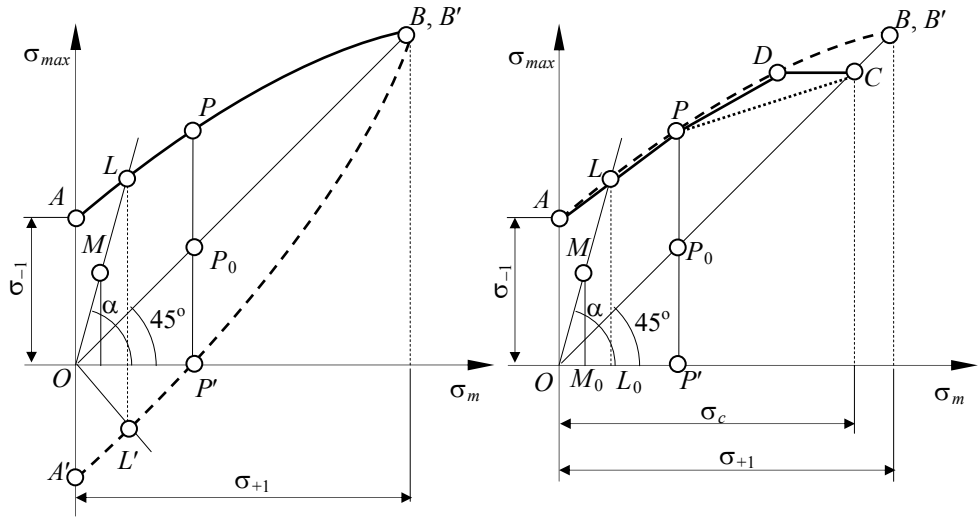


Fig. 10.6.

având aceleaşi coordonate (σ_{+1}, σ_{+1}).

Un ciclu oarecare limită este reprezentat prin punctele $L(\sigma_{maxL}, \sigma_{mL})$ şi $L'(\sigma_{minL}, \sigma_{mL})$ (fig. 10.6, *a*).

Se poate constata că diagrama Schmidt este formată din două diagrame Haigh răsturnate, reprezentate în coordonate oblice.

În figura 10.6, *b* este reprezentată diagrama schematizată Schmidt pentru materiale tenace, pentru domeniul în care tensiunea medie este pozitivă ($\sigma_m > 0$), (domeniu cel mai studiat prin încercări experimentale).

O solicitare variabilă oarecare, care nu a atins limita, este reprezentată, pentru domeniul pentru care $\sigma_m > 0$, prin punctul *M* de coordonate (σ_m, σ_{max}). Înclinarea dreptei *OM* este dată de unghiul a cărui tangentă este $\tan \alpha = \sigma_{max}/\sigma_m = 1 + \rho$. Rezultă că toate ciclurile care au aceeaşi caracteristică ρ cu ciclul reprezentat de punctul *M*, se află pe dreapta *OM* şi punctul *L* reprezintă starea limită pentru toate aceste cicluri.

10.6. CALCULUL DE REZISTENŢĂ LA SOLICITĂRI VARIABILE

Datorită multitudinii factorilor care condiționează starea limită, calculul de rezistență la solicitări variabile constă fie într-un calcul de verificare, caz în care se determină coeficientul de siguranță, fie într-un calcul de dimensionare la una din solicitările variabile simple (de întindere, încovoiere sau torsiune).

În cazul în care este necesar să se determine coeficientul de siguranță trebuiesc cunoscute următoarele elemente:

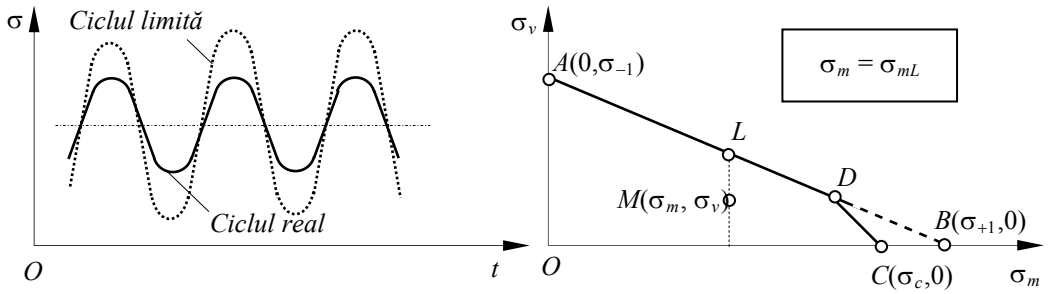
– ciclul real de solicitare al piesei ce implică cunoaşterea a două valori, de exemplu: σ_{max}, σ_{min}, calculate cu formulele clasice din rezistența materialelor; celelalte mărimi: σ_m, σ_v, *R* şi ρ fiind exprimate în funcție de σ_{max} şi σ_{min} cu ajutorul relațiilor (10.1 – 10.4);

– materialul din care este confecționată piesa ce implică cunoaşterea valorilor σ_{-1}, σ_0, σ_c, $\sigma_{+1}(=R_m)$, respectiv construirea diagramelor ciclurilor limită;

– cunoaşterea factorilor ce influențează rezistența la oboseală; în general aceşti factori sunt: β_k – coeficient de formă; ε_k – coeficient dimensional; γ_k – coeficient de stare a suprafeței.

Din cele prezentate mai sus reiese faptul că, atunci când se pune problema de dimensionare a unei piese supusă la solicitări variabile, este necesară o predimensionare pe baza formulelor clasice din rezistența materialelor, după care se face verificare. Dacă verificarea nu este îndeplinită – coeficientul de siguranță

este nesatisfăcător – se modifică dimensiunile piesei până când condiţia impusă



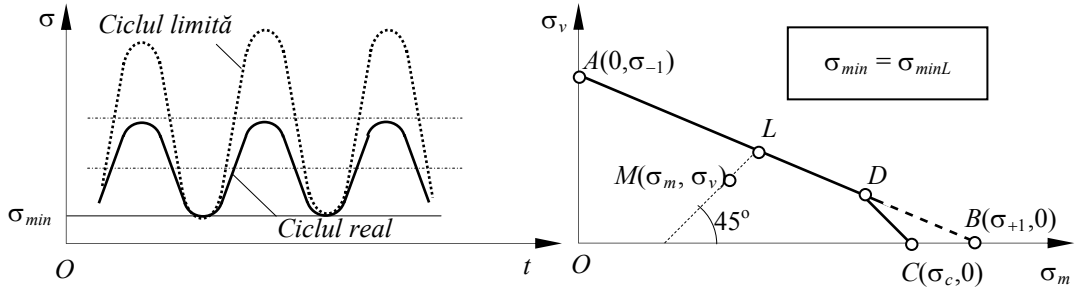
a) b)

Fig.10.7.

este îndeplinită.

Pentru determinarea coeficientului de siguranţă trebuie precizat în prealabil ciclul limită în raport cu care se compară ciclul real. În această privinţă în literatura tehnică s-au formulat mai mult criterii, dintre care cele mai importante sunt prezentate în cele ce urmează.

a) Ciclul limită trebuie să se caracterizeze prin aceeaşi valoare a tensiunii medii σ_m, ca şi ciclul dat (fig.10.7, *a*). În consecinţă pe diagrama Haigh schematizată a ciclurilor limită, ciclul limită al solicitării considerate corespunde punctului *L* din figura 10.7, *b*. Dezavantajul acestui criteriu constă în faptul că pentru un ciclu real ondulant, ciclul la limită poate fi un ciclu alternant.

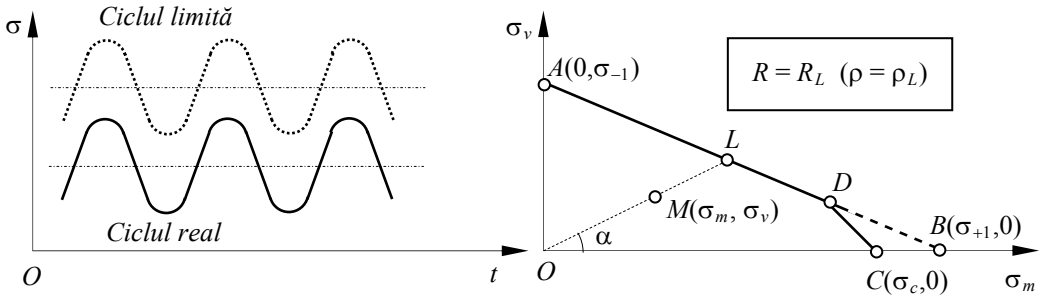


a) b)

Fig.10.8.

b) Ciclul limită trebuie să aibă aceeaşi valoare a tensiunii minime σ_{min} (în valoare absolută) ca şi ciclul real (fig 10.8, *a*). Pe diagrama Haigh schematizată a ciclurilor limită, ciclul limită al solicitării considerate corespunde punctului *L*, obţinut prin intersecţia unei drepte dusă prin *M* şi care face cu axa σ_m un unghi de 45°, cu diagrama ciclurilor limită (fig. 10.8, *b*). Acest criteriu este respectat numai

la determinarea rezistenţei la oboseală în ciclul pulsator. El are însă avantajul că dă valori mai acoperitoare în cazul ciclurilor apropiate de ciclul alternant simetric,



a) b)

Fig.10.9.

care este ciclul cel mai periculos.

c) Ciclul limită trebuie să aibă acelaşi coeficient de asimetrie R, respectiv aceeaşi caracteristică ρ a ciclului, ca şi ciclul real (fig. 10.9, *a*). Pe diagrama Haigh schematizată a ciclurilor limită, ciclul limită al solicitării considerate corespunde punctului L din figura 10.9, *b*. Dezavantajul acestui criteriu constă în faptul că procesul prin care se produce apariţia stării limită nu are o justificare fizică. Cu toate acestea, acest criteriu este folosit pentru determinarea rezistenţei la oboseală atât în cazul ciclului alternat simetric, cât şi al ciclului pulsator sau al ciclului static, fapt pentru care el va fi folosit în continuare pentru coeficientului de siguranţă.

Condiţia care trebuie îndeplinită atunci când se efectuează verificarea unei piese supusă la solicitări variabile este:

$$c \geq c_a \tag{10.14}$$

unde c_a este coeficientul de siguranţă admisibil la solicitări variabile.

În absenţa unor reglementări exprese, tratatele de specialitate prevăd următoarele valori orientative pentru c_a:

– piese de maşini confecţionate din oţel c = 1,5 ... 1,7
– piese de maşini uşoare, din oţel c = 1,3 ... 1,4
– piese importante, din oţel când încercarea la oboseală s-a făcut pe piesă c = 1,35
– piese din oţel turnat c = 1,4 ... 2,0
– piese din fontă c = 2,0 ... 3,0

10.6.1. SOLICITĂRI VARIABILE SIMPLE

După cum s-a arătat mai înainte rezistenţa la oboseală a unei piese este influenţată de foarte mulţi factori şi ea diferă mult faţă de valoarea stabilită pe epruvete standardizate. Din această cauză rezistenţa la oboseală a unei piese reale se calculează cu relaţia (10.8) în care σ_{-1} este rezistenţa la oboseală – în ciclul alternant simetric – a unei epruvete cu diametrul standardizat d_0, ideală, adică fără incluziuni străine şi cu suprafaţa perfect lustruită şi lipsită de concentratori de tensiuni.

Utilizând diagrama Haigh schematizată prin dreapta *AC* (fig. 10.5, a), diagrama similară, dar pentru piesa reală, poate fi aproximată prin dreapta *A′C* (fig. 10.10), deoarece concentratorii de tensiuni nu modifică limita de curgere la solicitarea statică, punctul *C* fiind corect.

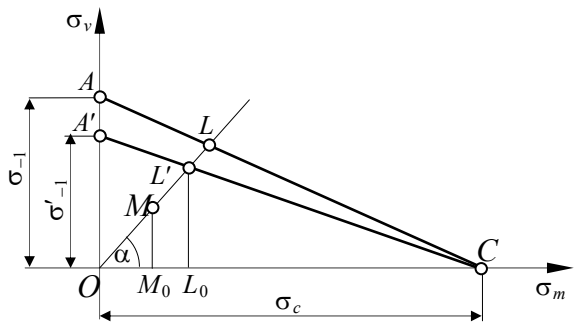


Fig. 10.10.

În consecinţă, aproximaţia făcută faţă de dreapta *AC*, constă în considerarea unei variaţii liniare pentru grupul de coeficienţi $\varepsilon_k \cdot \gamma_k / \beta_k$.

Limita de rezistenţă a unei piese, solicitată la ciclul definit de punctul $M(\sigma_m, \sigma_v)$, având caracteristica $\rho = \tan\alpha = MM_0/OM_0 = \sigma_v/\sigma_m$ corespunde punctului *L′* (fig. 10.10).

În această situaţie, când piesa este solicitată printr-un ciclu alternat simetric, iar încercarea la oboseală nu s-a făcut pe piesa reală, coeficientul de siguranţă se determină cu relaţia:

$$c = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_v} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_v} \cdot \frac{\varepsilon_k \gamma_k}{\beta_k} \tag{10.15}$$

în care $\sigma_v = \sigma_{max}$ este tensiunea normală maximă din secţiunea periculoasă.

10.6.1.1. Solicitări care produc numai tensiuni σ

Se admite că ciclul de solicitare reprezentat prin punctul $M(\sigma_m, \sigma_v)$ (fig.10.10) păstrează aceeaşi caracteristică până la limită. Rezultă că starea limită este reprezentată de punctul L' de coordonate $(\sigma_{mL}, \sigma_{vL})$ care se află la intersecția dreptelor $A'C$ şi OM.

Din asemănarea triunghiurilor OM_0M şi OL_0L' se deduce:

$$\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v} = \frac{\sigma_{mL} + \sigma_{vL}}{\sigma_m + \sigma_v} = \frac{\sigma_{\max L}}{\sigma_{\max}} = c_\sigma \tag{10.16}$$

unde c_σ este coeficientul de siguranță al ciclului real pentru tensiuni normale, față de ciclul limită.

Rezultă:

$$\sigma_{mL} = c_\sigma \cdot \sigma_m \; ; \; \sigma_{vL} = c_\sigma \cdot \sigma_v \tag{10.17}$$

valori care trebuie să satisfacă ecuația dreptei $A'C$:

$$\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_c} + \frac{\sigma_{vL}}{\sigma'_{-1}} = 1 . \tag{10.18}$$

După înlocuire şi ținând seama de (10.15) se obține:

$$c_\sigma = \frac{1}{\dfrac{\sigma_m}{\sigma_c} + \dfrac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} \left(\dfrac{\beta_k}{\varepsilon_k \gamma_k} \right)_\sigma} . \tag{10.19}$$

Pentru un ciclu alternant simetric pentru care $\sigma_m = 0$ şi $\sigma_v = \sigma_{max}$ rezultă relația (10.15).

Valoarea coeficientului de siguranță calculată fie cu (10.19), fie cu (10.15) trebuie să îndeplinească condiția (10.14).

10.6.1.2. Solicitări care produc numai tensiuni τ

Pentru solicitări variabile simple care produc tensiuni τ (forfecare pură, torsiune), admițând o diagramă limită similară cu cea din figura 10.10, dar în coordonate (τ_m, τ_v), în care $A'(0, \tau'_{-1})$, iar $C(\tau_c, 0)$, expresia coeficientului de siguranță c_τ se obține din (10.19) prin înlocuirea tensiunilor σ cu tensiunile corespunzătoare τ. Rezultă:

$$c_\tau = \frac{1}{\dfrac{\tau_m}{\tau_c} + \dfrac{\tau_v}{\tau_{-1}}\left(\dfrac{\beta_k}{\varepsilon_k \gamma_k}\right)_\tau}. \tag{10.20}$$

Pentru un ciclu alternant simetric:

$$c_\tau = \frac{\tau'_{-1}}{\tau_v} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_v} \cdot \left(\frac{\varepsilon_k \gamma_k}{\beta_k}\right)_\tau, \tag{10.21}$$

în care $\tau_v = \tau_{max}$.

10.6.2. SOLICITĂRI VARIABILE COMPUSE

Condiția de rezistență, la o bară solicitată static la încovoiere cu torsiune, în cazul ipotezei a III-a de rezistență (T_τ), este:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2} \le \sigma_a = \frac{\sigma_{+1}}{c}$$

Prin ridicarea la pătrat şi împărțirea cu σ_{+1}/c şi ținând seama că în teoria T_τ, $\sigma_{+1} = 2\tau_{+1}$, la limită se obține relația:

$$\left(\frac{c \cdot \sigma_{\max}}{\sigma_{+1}}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot \tau_{\max}}{\tau_{+1}}\right)^2 = 1 \tag{10.22}$$

care reprezintă ecuația unei elipse, având semiaxele egale cu σ_{+1} şi τ_{+1}.

Numeroasele experiențe, în special cele efectuate de către Gough şi Pollard, au arătat că ecuația anterioară rămâne valabilă şi în cazul solicitărilor variabile de încovoiere şi torsiune, în fază, ambele în ciclul alternant simetric. În consecință, se poate scrie:

$$\left(\frac{c \cdot \sigma_{\max}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot \tau_{\max}}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1. \tag{10.23}$$

În această relație $c \cdot \sigma_{max} = \sigma_L$ şi $c \cdot \tau_{max} = \tau_L$ reprezintă valorile limită ale tensiunilor σ, respectiv τ pentru ciclul de solicitare efectiv, iar σ_{-1} şi τ_{-1} rezistențele la oboseală pentru ciclurile alternant simetric la încovoiere, respectiv torsiune. Elipsa definită de (10.23) este redată în figura 10.11.

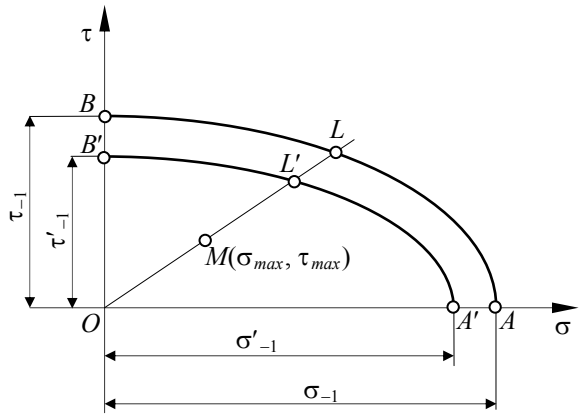


Fig. 10.11.

În cazul pieselor reale ecuația (10.23) capătă forma:

$$\left(\frac{c\cdot\sigma_{\max}}{\sigma'_{-1}}\right)^2+\left(\frac{c\cdot\tau_{\max}}{\tau'_{-1}}\right)^2=1\,, \tag{10.24}$$

în care σ'_{-1} şi τ'_{-1} se calculează cu relația (10.8).

Dacă se notează:

$$\frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{\max}}=c_\sigma\,;\quad \frac{\tau'_{-1}}{\tau_{\max}}=c_\sigma\,,$$

reprezentând coeficienții de siguranță în cazul solicitărilor variabile simple, după înlocuirea în relația (10.24) rezultă:

$$c=\frac{c_\sigma\cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2+c_\tau^2}} \tag{10.25}$$

relație cu ajutorul căreia se calculează coeficientul de siguranță al unei piese supusă la solicitări variabile compuse, de încovoiere cu torsiune, în fază, în ciclul alternant simetric.

Formula (10.25) se poate aplica şi pentru ciclurile asimetrice, dar în aceste cazuri coeficienții de siguranță c_σ şi c_τ se determină cu relațiile (10.19), respectiv (10.20).

Valoarea coeficientului c calculată cu relația (10.25) trebuie să îndeplinească condiția (10.14).

Probleme rezolvate

P.10.1. Un oțel prezintă la încercările de laborator tensiunile $R_m = \sigma_{+1} = 390$ N/mm^2 şi $\sigma_{-1} = 180$ N/mm^2. Să se determine rezistența la oboseală pentru ciclurile cu $R = 0{,}25$ şi $R = 0{,}5$ folosind diagrama Haigh schematizată din figura 10.5, *a*.

Dreapta *AB* din figura 10.5, *a*, în cazul oțelului dat, are ecuația:

$$\frac{\sigma_m}{390} + \frac{\sigma_v}{180} = 1.$$

Rezistența la oboseală corespunzătoare ciclului cu coeficientul de asimetrie $R = 0{,}25$ corespunde punctului L_1 din figura 10.12, care reprezintă intersecția dreptei *AB* cu dreapta OL_1 a cărei ecuație este:

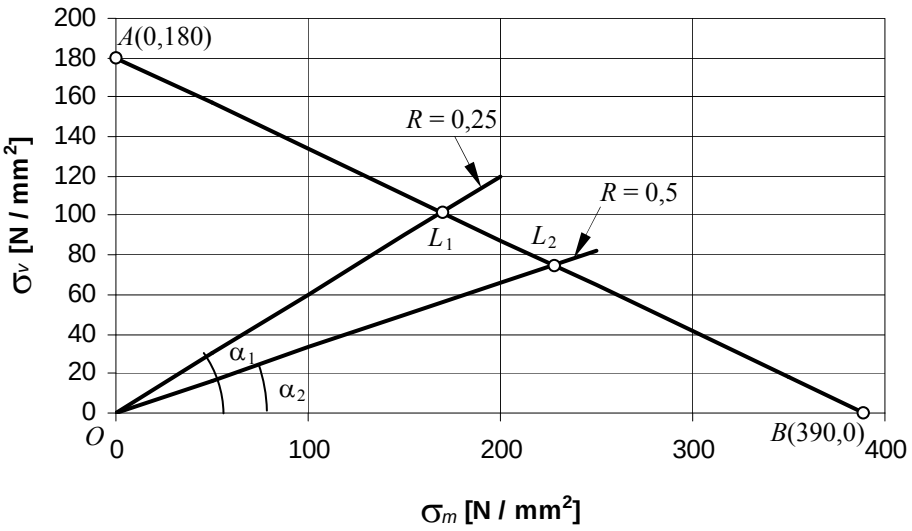


Fig. 10.12.

$$\sigma_v = (\tan\alpha)\cdot\sigma_m \Rightarrow \sigma_v = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)\cdot\sigma_m = \frac{1-0{,}25}{1+0{,}25}\sigma_m \Rightarrow \sigma_v = 0{,}6\cdot\sigma_m.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_m}{390} + \dfrac{\sigma_v}{180} = 1 \\ \sigma_v = 0{,}6\sigma_m \end{cases},$$

se determină coordonatele punctului L_1:

$$\sigma_{mL_1} = 169{,}5 \text{ N/mm}^2 \text{ şi } \sigma_{vL_1} = 101{,}7 \text{ N/mm}^2.$$

Rezistența la oboseală pentru ciclul cu R = 0,25 va fi:

$$\sigma_{0,25} = 169,5 + 101,7 = 271,2 \text{ N/mm}^2.$$

Pentru ciclul caracterizat de $R = -0,5$ se procedează analog şi se ajunge la sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_m}{390} + \dfrac{\sigma_v}{180} = 1 \\ \sigma_v = 0,3\sigma_m \end{cases}$$

prin rezolvarea căruia se obține:

$$\sigma_{mL_2} = 227,4 \text{ N/mm}^2 \text{ şi } \sigma_{vL_2} = 75 \text{ N/mm}^2.$$

În consecință rezistența la oboseală pentru ciclul cu coeficientul de asimetrie $R = 0,5$ este:

$$\sigma_{0,5} = 227,4 + 75 = 302,4 \text{ N/mm}^2.$$

P.10.2. Arcul elicoidal din figura 10.13, solicitat de forța F, care variază între valorile $F_{max} = 8$ kN şi $F_{min} = 3$ kN, are diametrul spirei $d = 24$ mm şi raza de înfăşurare $R = 60$ mm. El este confecționat din oțel de arc, călit şi ecruisat cu alice, cu caracteristicile $\tau_c = 600$ N/mm^2, $\tau_{-1} = 300$ N/mm^2.
Tensiunile corespunzătoare lui F_{max} şi F_{min} se calculează cu relația (3.115)

$$\tau_{\max} = \frac{FR}{W_p}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{d}{R}\right) = \frac{8000 \cdot 60}{2714,34}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{24}{60}\right) = 200,4 \text{ N/mm}^2;$$

$$\tau_{\min} = \frac{FR}{W_p}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{d}{R}\right) = \frac{2500 \cdot 60}{2714,34}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{24}{60}\right) = 62,6 \text{ N/mm}^2;$$

unde

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 24^3}{16} = 2714,34 \text{ mm}^3.$$

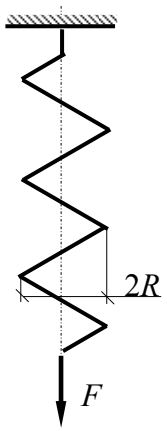


Fig. 10.13.

Rezultă că, în punctele de la interiorul arcului tensiunea tangențială variază între $\tau_{\max} = 200,4$ N/mm^2 şi $\tau_{\min} = 62,6$ N/mm^2.

Pe baza acestor valori cu relațiile (10.1) şi (10.2) se determină τ_m, respectiv τ_v:

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{200,4 + 62,6}{2} = 131,5 \text{ N/mm}^2.$$

$$\tau_v = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{200,4 - 62,6}{2} = 68,9 \text{ N/mm}^2.$$

Caracteristica ciclului va avea valoarea:

$$\rho_\tau = \frac{\tau_v}{\tau_m} = \frac{68,9}{131,5} = 0,52 .$$

Valorile factorilor, pentru arcuri de acest tip, se pot lua:

$\beta_k = 1,1$; $\varepsilon_k = 1$; $\gamma_k = 1,6$.

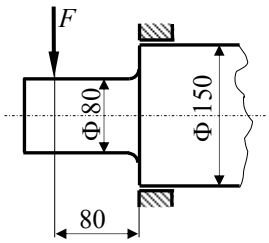


Fig. 10.14.

Folosind relația (10.20) se determină coeficientul de siguranță la solicitări variabile al arcului dat:

$$c_\tau = \frac{1}{\dfrac{\tau_m}{\tau_c} + \dfrac{\tau_v}{\tau_{-1}}\left(\dfrac{\beta_k}{\varepsilon_k \gamma_k}\right)_\tau} = \frac{1}{\dfrac{131{,}5}{600} + \dfrac{68{,}9}{300}\left(\dfrac{1{,}1}{1 \cdot 1{,}6}\right)} = 2{,}6 \,.$$

P.10.3. Să se determine forța maximă F_{max} pe care o poate suporta fusul din figura 10.14, de lungime l = 80 mm şi diametrul d = 80 mm, solicitat la un ciclu alternant simetric pentru un coeficient de siguranță c_a = 2,4. Materialul din care este confecționat fusul este un oțel care are σ_{-1} = 350 N/mm^2. Suprafața fusului este şlefuită fin, iar în zona racordării a suferit o ecruisare prin rulare, ceea ce face ca γ_σ = 1,38.

Tensiunea normală maximă care se dezvoltă în fus corespunde momentului de încovoiere maxim $M_{max} = F \cdot l$ şi are expresia:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{32 \cdot F \cdot l}{\pi d^3} \,.$$

Coeficientul de siguranță se determină cu relația (10.15):

$$c = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_v} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{max}} \cdot \frac{\varepsilon_k \gamma_k}{\beta_k} \,.$$

Înlocuind pe σ_{max} şi punând condiția $c \le c_a$ rezultă:

$$F \le \frac{\sigma_{-1} \cdot \pi \cdot d^3}{32 \cdot c \cdot l} \cdot \frac{\varepsilon_k \gamma_k}{\beta_k} \,.$$

Pentru forma constructivă a fusului se poate lua β_k = 1,5 şi ε_k = 0,7. Înlocuind numeric se obține:

$$F_{max} = \frac{350 \cdot \pi \cdot 80^3}{32 \cdot 2{,}4 \cdot 80} \cdot \frac{0{,}7 \cdot 1{,}38}{1{,}5} = 59000 \text{ N}.$$

P.10.3. Arborele din figura 10.15 are diametrul d = 60 mm şi transmite puterea P = 25 kW la turația n = 300 rot/min. Raportul eforturilor din ramura conducătoare şi ramura condusă a fiecărei curele de transmisie este 2. Razele roților sunt: R_1 = 400 mm, R_2 = 500 mm. Să se verifice rezistența arborelui şi să se determine coeficientul de siguranță la solicitări variabile ştiind că materialul din care este confecționat arborele este OLC 60 (C 60 – conform noii codificări).

Pentru verificarea de rezistență trebuie să se traseze diagramele de eforturile secționale.

Momentul de torsiune la care este supus arborele este:

$$M_x = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{P}{n} = 9{,}55 \cdot 10^3 \frac{25}{300} = 795{,}83 \text{ Nm}.$$

şi el se manifestă pe porțiunea cuprinsă între cele două roți (fig. 10.15)

Reducând, în axa arborelui, eforturile din ramurile curelelor, se obțin forțele (fig. 10.15):

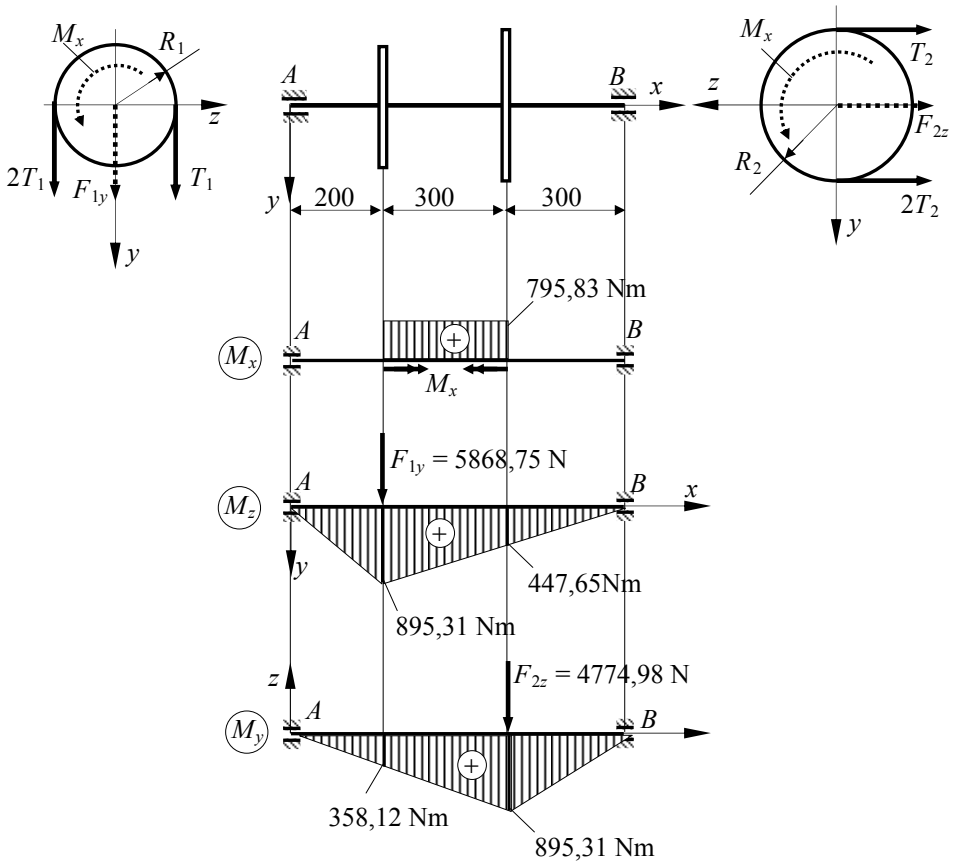


Fig. 10.15

$$F_{1y} = 3T_1 = 3\frac{M_x}{R_1} = 3 \cdot \frac{795{,}83 \cdot 10^3}{400} = 5968{,}75\ \text{N};$$

$$F_{2z} = 3T_2 = 3\frac{M_x}{R_2} = 3 \cdot \frac{795{,}83 \cdot 10^3}{500} = 4774{,}98\ \text{N};$$

deoarece între eforturile din ramurile curelelor şi momentul M_x existe egalităţile:

$$M_x = 2T_1R_1 - T_1R_1 = T_1R_1;$$

$$M_x = 2T_2R_2 - T_2R_2 = T_2R_2.$$

Cele două forţe acţionând în plane diferite vor produce momente de încovoiere atât în planul cu normala z (M_z), cât şi în planul cu normala y (M_y). Pe baza diagramelor de eforturi (fig. 10.15) se stabileşte secţiunea în care momentul total de încovoiere este maxim:

$$M_i^1 = \sqrt{358{,}12^2 + 895{,}31^2} = 964{,}28\ \text{Nm}; \qquad M_i^2 = \sqrt{895{,}31^2 + 447{,}65^2} = 1000{,}98\ \text{Nm}.$$

Secțiunea periculoasă este în dreptul roții 2 deoarece în această secțiune atât momentul încovoietor cât şi momentul de torsiune au valorile maxime.

Deoarece pe tronsonul dintre cele două roți arborele este solicitat la încovoiere cu torsiune, calculul de proiectare se face cu relația (7.32) în care:

$$K_{T\tau} = \sqrt{1+\left(\frac{M_x}{M_i^{\max}}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{795{,}83}{1000{,}98}\right)^2} = 1{,}277\ .$$

Rezultă:

$$\sigma_{\max}^{\text{ef}} = \frac{M_i^{\max}}{W_i^{ef}} K_{T\tau} = \frac{1000{,}98\cdot 10^3\cdot 32}{\pi\cdot 60^3}\cdot 1{,}277 = 60{,}3\ \text{N/mm}^2 < \sigma_a = 70\ \text{N/mm}^2.$$

Ciclul de încovoiere este alternant simetric. Pentru punctul cel mai solicitat al secțiunii corespunzătoare roții 2 tensiunile maxime, respectiv minime au valorile:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \pm\frac{M_i^{\max}}{W_i} = \pm\frac{1000{,}98\cdot 10^3\cdot 32}{\pi\cdot 60^3} = 47{,}2\ \text{N/mm}^2.$$

Coeficientul de siguranță la solicitări variabile simple se determină cu relația (10.19). Deoarece ciclul solicitării de încovoiere este alternant simetric $\sigma_m = 0$, iar $\sigma_v = \sigma_{max}$.

Din Anexa 2 pentru oțelul OLC 60 se adoptă: σ_c = 410 N/mm^2; σ_{-1} = 340 N/mm^2; τ_c = 210 N/mm^2; τ_{-1} = 195 N/mm^2. Pentru arborele dat se consideră $\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\sigma$ =2,3.

În acest caz, coeficentul de siguranță la solicitări variabile simple care produc tensiunile σ este:

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{\sigma_m}{\sigma_c}+\frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}}\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\sigma} = \frac{1}{\frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}}\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\sigma} = \frac{1}{\frac{47{,}2}{340}\cdot 2{,}3} = 3{,}13$$

Ciclul de torsiune se consideră pulsator ca urmare a pornirilor şi opririlor dese. Din această cauză $\tau_m = \tau_v = \tau_{max}/2$, unde

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{795{,}83\cdot 10^3\cdot 16}{\pi\cdot 60^3} = 18{,}76\ \text{N/mm}^2.$$

Considerând $\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\tau$ = 1,8, coeficientul de siguranță la solicitări variabile simple care produc tensiunile τ are valoarea:

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{\tau_m}{\tau_c}+\frac{\tau_v}{\tau_{-1}}\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon_k\gamma_k}\right)_\tau} = \frac{1}{\frac{18{,}76}{2}\left(\frac{1}{210}+\frac{1}{195}\cdot 1{,}8\right)} = 7{,}62\ .$$

Coeficientul de siguranță pentru solicitarea variabilă compusă se determină cu relația (10.25):

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{3{,}13 \cdot 7{,}62}{\sqrt{3{,}13^2 + 7{,}62^2}} = 2{,}89 .$$

Probleme suplimentare

P.10.4. Să se verifice la oboseală un arbore de diametru d = 70 mm din OL60, solicitat la răsucire de un moment care variază între limitele $M_{x\ max}$ = 2,4 kNm, $M_{x\ min}$ = – 1,2 kNm. Se cunoaşte $(\beta_k/\varepsilon_k\gamma_k)_\tau = 1{,}74$.

P.10.5. Să se calculeze coeficientul de siguranță la solicitări variabile compuse la un arbore din OLC 60 de diametu d = 76 mm, solicitat la încovoiere şi răsucire de momentele: $M_{i\ max}$ = 3,6 kNm; $M_{i\ min}$ = – 2,4 kNm; $M_{x\ max}$ = 4,0 kNm; $M_{x\ min}$ = –1,0 kNm. Se dau $(\beta_k/\varepsilon_k\gamma_k)_\sigma = 2{,}3$; $(\beta_k/\varepsilon_k\gamma_k)_\tau = 1{,}8$.